

1

解答例のページへ

実数の組 (a, r) に関する以下の条件(A)を考える。

(A) 初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は, すべての正の整数 n について,

$\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす。ただし, いずれの正の整数 n に対しても, a_n および $3a_n$ は $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない。

- (1) 組 (a, r) が条件(A)を満たすとき, $\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ。
- (2) 組 (a, r) が条件(A)を満たし, かつ $\frac{a}{\pi}$ が無理数であるとき, $r = 3$ であることを示せ。
- (3) 組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件(A)を満たすとき, r は整数であることを示せ。
- (4) $1 \leq r \leq 10$ を満たす r で, 組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件(A)を満たすものをすべて求めよ。

2[解答例のページへ](#)

正の実数 p に対して、 $f(x) = x^3 - x + p$ とする。

- (1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 p のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) a, b, c は実数で $c > 0$ とする。また、 i を虚数単位とする。 $a, b + ci, b - ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、 a, c, p をそれぞれ b を用いて表し、 b のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の b, c について、少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

3

解答例のページへ

座標平面において円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C とする。 a を 1 より大きい実数とし、2 点 $A(2a, 0)$, $B(-a, 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 とし、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点を D とする。

- (1) 直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。 $\triangle BHD$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が(2)で求めた値であるとき、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。また、 $\triangle ABD$ の外接円の中心と半径を求めよ。

4[解答例のページへ](#)

i を虚数単位とする。 a は 1 でない正の実数の定数とする。複素数平面において、方程式 $|z - a^2i| = a|z - i|$ を満たす点 z が表す図形を C とする。

(1) 図形 C は原点 O を中心とする円であることを示し、その半径を求めよ。

以下の問いでは点 z は円 C 上を動くとし、 z の偏角を θ とする。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。また、 $w = z - \frac{1}{z}$ とおく。

(2) $|w - 2i|^2$ を a と $\sin \theta$ を用いて表せ。

(3) $|w - 2i| + |w + 2i|$ は点 z の位置によらない定数であることを示せ。

5

解答例のページへ

$f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}$ ($x > 1$) について以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ。
- (2) n を正の整数とする。関数 $f(x)$ が極大値をとる x で、 $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。また、関数 $f(x)$ が極小値をとる x で、 $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つだけ存在することを示せ。
- (3) 正の整数 n に対して、(2)の極大値をとる x を α_n , 極小値をとる x を β_n とする。

このとき、 $\frac{1}{\pi} \left\{ \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) \right| - \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) \right| \right\}$ は整数となる。その値を求めよ。

6

[解答例のページへ](#)

$f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}} \ (x \geq 0)$ とし、 $\alpha = \int_0^5 f(x)dx$ とする。

- (1) $f(x) \ (x \geq 0)$ が最大値をとることを示し、その値 M を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 5$ において $e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leq f(x)$ を示せ。また、 $\frac{10}{3}f(5) \leq \alpha$ を示せ。
- (3) M は(1)で求めたものとし、実数 t は $\frac{2}{3}f(5) \leq t \leq M$ の範囲を動くとする。曲線 $y = f(x) - t \ (x \geq 0)$ 、2 直線 $x = 0$ 、 $x = 5$ 、および x 軸で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ の最小値を α を用いて表せ。

1

問題のページへ

数列 $\{a_n\}$ は、初項 a 、公比 r の等比数列より $a_n = ar^{n-1}$ となり、条件(A)は、 a_n と $3a_n$ が $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でなく、

$$\tan a_{n+1} = \tan 3a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) $n=1, 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ から、 $\tan a_2 = \tan 3a_1$ 、 $\tan a_3 = \tan 3a_2$ となり、

$$\tan ar = \tan 3a, \quad \tan ar^2 = \tan 3ar$$

(2) n_1, n_2 を整数として、(1) から $ar = 3a + n_1\pi$ 、 $ar^2 = 3ar + n_2\pi$ となり、

$$(r-3)a = n_1\pi \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad r(r-3)a = n_2\pi \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $r \neq 3$ とすると、 $\textcircled{2}$ から $\frac{a}{\pi} = \frac{n_1}{r-3}$ となり、 $\frac{a}{\pi}$ が無理数より $n_1 \neq 0$ である。

すると、 $\textcircled{3}$ から $r(r-3) \cdot \frac{n_1}{r-3} = n_2$ となり $r = \frac{n_2}{n_1}$ より、 r は有理数である。

ところが、このとき $\frac{n_1}{r-3}$ は有理数となり、 $\frac{a}{\pi}$ が無理数であることに反する。

したがって、 $r=3$ であり、このとき $a_{n+1} = a \cdot 3^n = 3a_n$ となり、 $\textcircled{1}$ は成立する。

(3) $a = \frac{2}{5}\pi$ のとき、 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から、 $\frac{2}{5}(r-3) = n_1 \cdots \cdots \textcircled{4}$ 、 $\frac{2}{5}r(r-3) = n_2 \cdots \cdots \textcircled{5}$

(i) $n_1 = 0$ のとき $\textcircled{4}$ から $r=3$ となる。

(ii) $n_1 \neq 0$ のとき $\textcircled{4}\textcircled{5}$ から $r = \frac{n_2}{n_1}$ となり、 $\textcircled{4}$ に代入して $\frac{2}{5}\left(\frac{n_2}{n_1} - 3\right) = n_1$ から、

$$2(n_2 - 3n_1) = 5n_1^2 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{6}$ の左辺は偶数なので、右辺 $5n_1^2$ は偶数、すなわち n_1 は偶数になる。

そこで、 m_1 を 0 でない整数として、 $n_1 = 2m_1$ とおくと、 $\textcircled{6}$ から、

$$2(n_2 - 3 \cdot 2m_1) = 5 \cdot 4m_1^2, \quad n_2 - 6m_1 = 10m_1^2$$

すると、 $n_2 = 10m_1^2 + 6m_1 = 2(5m_1^2 + 3m_1)$ となり、 n_2 は偶数となる。

そこで、 m_2 を整数として、 $n_2 = 2m_2$ とおくと、 $2m_2 = 2(5m_1^2 + 3m_1)$ より、

$$m_2 = 5m_1^2 + 3m_1$$

これから、 $r = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2m_2}{2m_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5m_1^2 + 3m_1}{m_1} = 5m_1 + 3$ となり、 r は整数である。

(i)(ii) より、 $\textcircled{1}$ を満たす r は整数である。

(4) $a = \frac{2}{5}\pi$ のとき、(3) から、 $1 \leq r \leq 10$ を満たすものは、

(i) $n_1 = 0$ のとき $r=3$ となり、このとき $\textcircled{1}$ は成り立ち、条件(A)を満たす。

(ii) $n_1 \neq 0$ のとき $r = 5m_1 + 3$ ($m_1 \neq 0$) と表せ、 $1 \leq 5m_1 + 3 \leq 10$ となる。

すると、 $m_1 = 1$ から $r=8$ となり、 $a_n = \frac{2}{5}\pi \cdot 8^{n-1} = \frac{2 \cdot 8^{n-1}}{5}\pi$ であり、

$$a_{n+1} - 3a_n = \frac{2 \cdot 8^n}{5}\pi - \frac{6 \cdot 8^{n-1}}{5}\pi = \frac{(16-6) \cdot 8^{n-1}}{5}\pi = 2 \cdot 8^{n-1}\pi$$

これより, $\tan a_{n+1} = \tan(3a_n + 2 \cdot 8^{n-1} \pi) = \tan 3a_n$ となり, このとき①は成り立ち, 条件(A)を満たす。

(i)(ii)より, $1 \leq r \leq 10$ で条件(A)を満たす r は, $r = 3, 8$ である。

[コメント]

三角関数と整数を融合した難度の高い問題です。(1)で得られた必要条件をもとに式変形をしていきます。

2

問題のページへ

- (1) $f(x) = x^3 - x + p$ ($p > 0$) に対し, $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつのは, $y = f(x)$ のグラフと x 軸がただ 1 つの共有点をもつことに対応し,

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$f(x)$ の増減は右表のようになり,

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3} + p$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3} + p$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

求める条件は, $p > 0$ に注意すると, $-\frac{2}{9}\sqrt{3} + p > 0$ より $p > \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdots \cdots \textcircled{1}$ である。

- (2) $a, b+ci, b-ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき, 解と係数の関係より,

$$a + (b+ci) + (b-ci) = 0, \quad a(b+ci) + (b+ci)(b-ci) + a(b-ci) = -1$$

まとめると, $a + 2b = 0, 2ab + b^2 + c^2 = -1$ となり, $c > 0$ から,

$$a = -2b \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad c = \sqrt{-2ab - b^2 - 1} = \sqrt{4b^2 - b^2 - 1} = \sqrt{3b^2 - 1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また, $a(b+ci)(b-ci) = -p$ から, $p = -a(b^2 + c^2)$ となり, $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から,

$$p = 2b(b^2 + 3b^2 - 1) = 2b(4b^2 - 1) = 8b^3 - 2b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

そして, b のとりうる値の範囲は, $\textcircled{3}$ および $\textcircled{1}\textcircled{4}$ から,

$$c = \sqrt{3b^2 - 1} > 0 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad p = 8b^3 - 2b > \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$ より $3b^2 - 1 > 0$ となり, $(\sqrt{3}b+1)(\sqrt{3}b-1) > 0$ から, $b < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} < b \cdots \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{6}$ より $36b^3 - 9b - \sqrt{3} > 0$ となり, $(3b - \sqrt{3})(12b^2 + 4\sqrt{3}b + 1) > 0$ から,

$$(3b - \sqrt{3})(2\sqrt{3}b + 1)^2 > 0, \quad b > \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}\textcircled{8}$ より, 求める b のとりうる値の範囲は, $b > \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

- (3) $\textcircled{3}$ から $c = \sqrt{3b^2 - 1}$ より $c^2 = 3b^2 - 1$ となり, $c^2 + 1 = 3b^2 \cdots \cdots \textcircled{9}$

ここで, b と c がともに整数と仮定すると, $\textcircled{9}$ の右辺は 3 の倍数となり, 左辺は,

$$\bullet c \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\bullet c \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\bullet c \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

これより, $\textcircled{9}$ の左辺は 3 の倍数ではないことより, $\textcircled{9}$ は成立しない。

以上より, b, c の少なくともどちらか一方は整数でない。

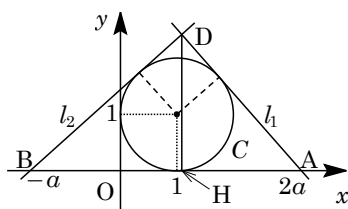
[コメント]

標準的な 3 次方程式の問題に整数が絡んでいます。量的にはやや多めです。

3

問題のページへ

$a > 1$ のとき、2 点 $A(2a, 0)$ 、 $B(-a, 0)$ から、円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ に接線を引く。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とし、 l_1 と l_2 の交点を D とする。



- (1) l_1 の傾きを p とおくと、 $l_1: y = p(x-2a)$ ($p < 0$) と表され、円 C の中心 $(1, 1)$ と $l_1: px - y - 2ap = 0$ の距離が C の半径 1 に等しいことより、

$$\frac{|p-1-2ap|}{\sqrt{p^2+1}} = 1, \quad |(1-2a)p-1| = \sqrt{p^2+1}$$

両辺 2 乗して、 $(1-2a)^2 p^2 - 2(1-2a)p + 1 = p^2 + 1$ となり、

$$(4a^2 - 4a)p^2 - 2(1-2a)p = 0, \quad 2a(a-1)p^2 + (2a-1)p = 0$$

$a > 1$ で $p < 0$ から、 $p = -\frac{2a-1}{2a(a-1)}$ となり、 l_1 の方程式は、

$$y = -\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) l_2 の傾きを q とおくと、 $l_2: y = q(x+a)$ ($q > 0$) と表され、(1)と同様にすると、

$$q = -\frac{-a-1}{-a(-\frac{a}{2}-1)} = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}$$

これより、 l_2 の方程式は、 $y = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a) \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて、①②を連立すると、 $-\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a) = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a)$ から、

$$-(2a-1)(a+2)(x-2a) = 4(a+1)(a-1)(x+a)$$

$-(2a^2 + 3a - 2)(x - 2a) = (4a^2 - 4)(x + a)$ から、 $(6a^2 + 3a - 6)x = 6a^2$ となる。

$a > 1$ から、点 D の x 座標は $x = \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}$ であり、点 D から x 軸へ下ろした垂

線の足 H の座標は $H(\frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}, 0)$ となる。

さて、 $\triangle BHD$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ から、 $BH:AH = 5:4$ となり、

$$BH = \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2} + a, \quad AH = 2a - \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}$$

$5AH = 4BH$ から、 $5(2a - \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}) = 4(\frac{2a^2}{2a^2 + a - 2} + a)$ となり、

$$6a = 9 \cdot \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}, \quad a(2a^2 + a - 2) = 3a^2$$

すると、 $a > 1$ から $a^2 - a - 1 = 0$ となり、 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、①②から、

$$pq = -\frac{2a-1}{2a(a-1)} \cdot \frac{2(a+1)}{a(a+2)} = -\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a-1)(a+2)} = -\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a^2+a-2)}$$

ここで、 $a^2 = a+1$ より、 $a^2+a-2 = (a+1)+a-2 = 2a-1$ となり、

$$pq = -\frac{(2a-1)(a+1)}{(a+1)(2a-1)} = -1$$

これより、 l_1 と l_2 は直交し、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ である。

このとき、直角三角形 ABD の外接円の直径は辺 AB となり、外接円の中心は辺 AB の中点より $\left(\frac{2a-a}{2}, 0\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 0\right)$ となる。

また、外接円の半径は、 $\frac{1}{2}AB = \frac{2a-(-a)}{2} = \frac{3}{2}a = \frac{3+3\sqrt{5}}{4}$ である。

[コメント]

円と接線を題材にした問題ですが、かなりのボリュームがあります。そのため、たとえば q の値を求める際に、 p の $2a$ を $-a$ に置き換えるような工夫がショートカットのポイントになります。

4

問題のページへ

- (1) $a > 0$, $a \neq 1$ のとき, $|z - a^2 i| = a|z - i|$ に対し, $|z - a^2 i|^2 = a^2 |z - i|^2$ として,

$$(z - a^2 i)(\bar{z} + a^2 i) = a^2 (z - i)(\bar{z} + i)$$

$$z\bar{z} + a^2 iz - a^2 i\bar{z} + a^4 = a^2 (z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1) \text{ となり, } (a^2 - 1)z\bar{z} = a^2(a^2 - 1)$$

$$a^2 - 1 \neq 0 \text{ より, } z\bar{z} = a^2 \text{ すなわち } |z|^2 = a^2 \text{ となり, } |z| = a \text{ から, 点 } z \text{ が表す図}$$

形 C は原点 O を中心とする半径 a の円である。

- (2) (1)から, $z = a(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくことができ,

$$w - 2i = \left(z - \frac{1}{z}\right) - 2i = a(\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{1}{a}(\cos \theta - i \sin \theta) - 2i$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)\cos \theta + i\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta - 2\right\}$$

$$|w - 2i|^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \cos^2 \theta + \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta - 2\right\}^2$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 (1 - \sin^2 \theta) + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \sin^2 \theta - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta + 4$$

$$= 4\sin^2 \theta - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta + a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

$$= 4\sin^2 \theta - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(2\sin \theta - a - \frac{1}{a}\right)^2$$

- (3) $w + 2i = \left(a - \frac{1}{a}\right)\cos \theta + i\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta + 2\right\}$ より,

$$|w + 2i|^2 = 4\sin^2 \theta + 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin \theta + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(2\sin \theta + a + \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\text{これより, } |w - 2i| + |w + 2i| = \left|2\sin \theta - a - \frac{1}{a}\right| + \left|2\sin \theta + a + \frac{1}{a}\right|$$

$$\text{さて, } a > 0 \text{ から, 相加平均と相乗平均の関係より, } a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \text{ となり,}$$

等号成立は $a = \frac{1}{a}$ から $a = 1$ のときであるが, $a \neq 1$ から等号は成り立たない。

$$\text{すると, } a + \frac{1}{a} > 2 \text{ となり, } -2 \leq 2\sin \theta \leq 2 \text{ から,}$$

$$2\sin \theta - a - \frac{1}{a} < 0, \quad 2\sin \theta + a + \frac{1}{a} > 0$$

$$\text{以上より, } |w - 2i| + |w + 2i| = -\left(2\sin \theta - a - \frac{1}{a}\right) + \left(2\sin \theta + a + \frac{1}{a}\right) = 2a + \frac{2}{a}$$

[コメント]

複素数平面上の図形についての標準的な問題です。

5

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x}$ ($x > 1$) に対して,

$$f'(x) = \frac{\cos(\log x) \cdot x^{-1} \cdot x - \sin(\log x)}{x^2} = \frac{\cos(\log x) - \sin(\log x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\{-\sin(\log x) - \cos(\log x)\} \cdot x^{-1} \cdot x^2 - \{\cos(\log x) - \sin(\log x)\} \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{\{-\sin(\log x) - \cos(\log x)\} - 2\{\cos(\log x) - \sin(\log x)\}}{x^3} \\ &= \frac{\sin(\log x) - 3\cos(\log x)}{x^3} \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^2} \cos\left(\log x + \frac{\pi}{4}\right)$ となり, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ において,

$$2(n-1)\pi < \log x < 2n\pi, \quad 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} < \log x + \frac{\pi}{4} < 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

すると, $f'(x) = 0$ を満たすのは,

$$\log x + \frac{\pi}{4} = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \log x + \frac{\pi}{4} = 2(n-1)\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$\log x = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{4} = \left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi, \quad \log x = 2(n-1)\pi + \frac{5}{4}\pi = \left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi \text{ となり,}$$

$$x = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}, \quad x = e^{\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}$$

$f'(x)$ の符号は $x = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$ の前後で正から負へ, $x = e^{\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}$ の前後で負から正へと変化するのので, $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	$e^{2(n-1)\pi}$	...	$e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$	...	$e^{\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}$	...	$e^{2n\pi}$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

したがって, $e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ において, $f(x)$ は $x = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$ で極大値をとり, $x = e^{\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}$ で極小値をとる。

(3) $\alpha_n = e^{\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}$, $\beta_n = e^{\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}$ となり, $\log \alpha_n = \left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi$, $\log \beta_n = \left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi$

$$\begin{aligned} f''(\alpha_n) &= \frac{\sin(\log \alpha_n) - 3\cos(\log \alpha_n)}{\alpha_n^3} = \frac{\sin\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi - 3\cos\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}{e^{3\left(2n - \frac{7}{4}\right)\pi}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{-\frac{21}{4}\pi} \cdot e^{6n\pi}} = -\sqrt{2} e^{\frac{21}{4}\pi} \cdot e^{-6n\pi} \end{aligned}$$

すると、 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) \right| = \left| -\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi} \cdot \frac{e^{-6\pi}}{1-e^{-6\pi}} \right| = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1}$ となる。

$$\begin{aligned} f''(\beta_n) &= \frac{\sin(\log \beta_n) - 3\cos(\log \beta_n)}{\beta_n^3} = \frac{\sin\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi - 3\cos\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}{e^{3\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi}} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{-\frac{9}{4}\pi} \cdot e^{6n\pi}} = \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi} \cdot e^{-6n\pi} \end{aligned}$$

すると、 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) \right| = \left| \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi} \cdot \frac{e^{-6\pi}}{1-e^{-6\pi}} \right| = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1}$ となる。

そこで、 $N = \frac{1}{\pi} \left\{ \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) \right| - \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) \right| \right\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1} - \log \frac{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1} \cdot \frac{e^{6\pi}-1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}} \right) = \frac{1}{\pi} \log e^{\frac{21}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \log e^{3\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 3\pi = 3 \end{aligned}$$

[コメント]

微分と増減に無限級数を融合した問題です。内容は基本事項の積み重ねですが、要求される計算力はかなりのレベルです。

6

問題のページへ

- (1) $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ ($x \geq 0$) に対して,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}} + \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}}(1-x^2)$$

すると, $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減は右表の

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	$e^{-\frac{1}{4}}$	↘

ようになり, $x=1$ で最大値 $M = e^{-\frac{1}{4}}$ をとる。

- (2) $f(x) - e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(e^{-\frac{x^2}{4}} - e^{-\frac{25}{4}}\right)$ となる。

ここで, $0 \leq x \leq 5$ において, $e^{-\frac{25}{4}} \leq e^{-\frac{x^2}{4}} \leq 1$ から $e^{-\frac{x^2}{4}} - e^{-\frac{25}{4}} \geq 0$ なので,

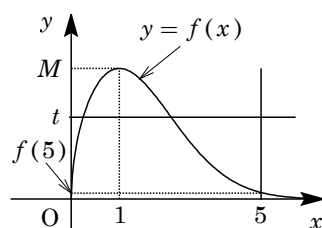
$$f(x) - e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \geq 0, \quad e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leq f(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\alpha = \int_0^5 f(x)dx$ とするとき, $\textcircled{1}$ から $e^{-\frac{25}{4}} \int_0^5 \sqrt{x} dx \leq \alpha$ となり,

$$e^{-\frac{25}{4}} \int_0^5 \sqrt{x} dx = e^{-\frac{25}{4}} \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^5 = \frac{10}{3} \sqrt{5} e^{-\frac{25}{4}} = \frac{10}{3} f(5)$$

したがって, $\frac{10}{3} f(5) \leq \alpha$ となる。

- (3) $\frac{2}{3} f(5) \leq t \leq M$ を満たす実数 t に対して, 曲線 $y = f(x) - t$ ($x \geq 0$), 2 直線 $x=0$, $x=5$, および x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。



このとき, 実数 t の値が $\frac{2}{3} f(5) \leq t \leq f(5)$ のときも,

$f(5) \leq t \leq M$ のときも, $V(t)$ は,

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_0^5 \{f(x) - t\}^2 dx = \pi \left[\int_0^5 \{f(x)\}^2 dx - 2t \int_0^5 f(x) dx + t^2 \int_0^5 dx \right] \\ &= \pi \left[\int_0^5 \{f(x)\}^2 dx - 2\alpha t + 5t^2 \right] \end{aligned}$$

ここで, $\int_0^5 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^5 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^5 = 1 - e^{-\frac{25}{2}}$ より,

$$V(t) = \pi \left(1 - e^{-\frac{25}{2}} - 2\alpha t + 5t^2 \right) = \pi \left\{ 5 \left(t - \frac{\alpha}{5} \right)^2 + 1 - e^{-\frac{25}{2}} - \frac{\alpha^2}{5} \right\} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて, (2) から $\frac{10}{3} f(5) \leq \alpha$ であり, また $f(x) \leq M$ から,

$$\alpha = \int_0^5 f(x) dx \leq \int_0^5 M dx = 5M$$

まとめると, $\frac{10}{3} f(5) \leq \alpha \leq 5M$ より, $\frac{2}{3} f(5) \leq \frac{\alpha}{5} \leq M$ となる。

すると、実数 t は $\frac{2}{3}f(5) \leq t \leq M$ の範囲を動くので、②から、 $V(t)$ は $t = \frac{\alpha}{5}$ のとき最小値 $\pi\left(1 - e^{-\frac{25}{2}} - \frac{\alpha^2}{5}\right)$ をとる。

[コメント]

回転体の体積の最小値を求める問題です。(3)の問題文で与えられた t の範囲の意味は、 $\frac{\alpha}{5}$ の範囲と②式を見るとわかります。