1

解答解説のページへ

t, p を実数とし，$t>0$ とする。xy 平面において，原点 O を中心とし点 A$(1,\ t)$ を通る円を C_1 とする。また，点 A における C_1 の接線を l とする。直線 $x=p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は，x 軸と接し，点 A において直線 l とも接するとする。

(1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2) p を t を用いて表せ。

(3) C_2 と x 軸の接点を M とし，C_2 と y 軸の交点を N とする。t が正の実数全体を動くとき，三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

整数a_1，a_2，a_3，…を，さいころをくり返し投げることにより，以下のように定めていく。まず，$a_1=1$とする。そして，正の整数nに対し，a_{n+1}の値を，n回目に出たさいころの目に応じて，次の規則で定める。

(規則)　n回目に出た目が1, 2, 3, 4なら$a_{n+1}=a_n$とし，5, 6なら$a_{n+1}=-a_n$とする。

たとえば，さいころを3回投げ，その出た目が順に5，3，6であったとすると，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_3=-1$，$a_4=1$となる。

$a_n=1$となる確率をp_nとする。ただし，$p_1=1$とし，さいころのどの目も，出る確率は$\frac{1}{6}$であるとする。

(1)　p_2，p_3を求めよ。

(2)　p_{n+1}をp_nを用いて表せ。

(3)　$p_n \leqq 0.5000005$を満たす最小の正の整数nを求めよ。
　　ただし，$0.47<\log_{10}3<0.48$であることを用いてよい。

3

解答解説のページへ

$0<t<1$ とする。平行四辺形 ABCD について，線分 AB，BC，CD，DA を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1，D_1 とする。さらに，点 A_2，B_2，C_2，D_2 および A_3，B_3，C_3，D_3 を次の条件を満たすように定める。

(条件)　$k=1,\ 2$ について，点 A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1}，D_{k+1} は，それぞれ線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，$\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$，$\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$，$\mathrm{D}_k\mathrm{A}_k$ を $t:1-t$ に内分する。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=p\vec{a}+q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{D}_1}=x\vec{a}+y\vec{b}$ を満たす実数 p, q, x, y を t を用いて表せ。

(2)　四角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ は平行四辺形であることを示せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$ が平行となるような t の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$0 < a < 4$ とする。曲線

$$C_1 : y = 4\cos^2 x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),\ \ C_2 : y = a - \tan^2 x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

は，ちょうど 2 つの共有点をもつとする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

曲線$C: y=(x+1)e^{-x}$ $(x>-1)$上の点Pにおける法線とx軸との交点をQとする。点Pのx座標をtとし，点Qと点R$(t,\ 0)$との距離を$d(t)$とする。

(1) $d(t)$をtを用いて表せ。

(2) $x \geqq 0$のとき$e^x \geqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$であることを示せ。

(3) 点Pが曲線C上を動くとき，$d(t)$の最大値を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

i は虚数単位とする。次の条件(I), (II)をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I)　z の虚部は正である。

(II)　複素数平面上の点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(1-iz)$，$\mathrm{C}(z^2)$ は一直線上にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

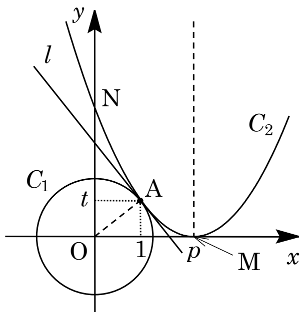
(1)　1 でない複素数 α について，α の虚部が正であることは，$\dfrac{1}{\alpha-1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2)　集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3)　$w=\dfrac{1}{z-1}$ とする。z が S を動くとき，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$t>0$ のとき，原点 O を中心とし，点 $\mathrm{A}(1,\ t)$ を通る円 C_1 の方程式は，$x^2+y^2=1+t^2$ である。

すると，点 A における C_1 の接線 l の方程式は，

$$x+ty=1+t^2,\quad y=-\frac{1}{t}x+t+\frac{1}{t}$$

(2)　直線 $x=p$ を軸とし，x 軸と接する 2 次関数のグラフ C_2 は，$a\neq 0$ として，

$$y=a(x-p)^2,\quad y'=2a(x-p)$$

グラフ C_2 は点 A において直線 l と接することより，

$$t=a(1-p)^2\cdots\cdots\cdots①,\quad -\frac{1}{t}=2a(1-p)\cdots\cdots\cdots②$$

②から $p\neq 1$ なので $a=-\dfrac{1}{2t(1-p)}$ となり，①に代入すると $t=-\dfrac{1}{2t}(1-p)$ から，

$$2t^2=-1+p,\quad p=2t^2+1\cdots\cdots\cdots③$$

(3)　①③より $t=a(1-2t^2-1)^2$ となり，$a=\dfrac{t}{4t^4}=\dfrac{1}{4t^3}$ から $C_2: y=\dfrac{1}{4t^3}(x-2t^2-1)^2$

これより，$\mathrm{M}(2t^2+1,\ 0)$，$N\left(0,\ \dfrac{(2t^2+1)^2}{4t^3}\right)$ となり，$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(2t^2+1)\cdot\frac{(2t^2+1)^2}{4t^3}=\frac{1}{8}\left(\frac{2t^2+1}{t}\right)^3=\frac{1}{8}\left(2t+\frac{1}{t}\right)^3$$

すると，$2t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}}=2\sqrt{2}$ $\left(\text{等号は } 2t=\dfrac{1}{t} \text{ すなわち } t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき成立}\right)$ より，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{1}{8}(2\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

円と放物線を題材にした頻出問題です。(3)は微分法を利用することも考えられます。

2

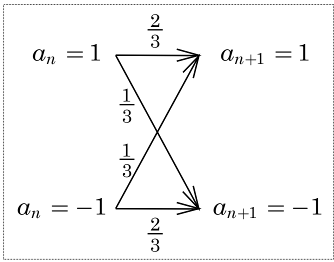
問題のページへ

(1)　整数 a_1，a_2，a_3，…に対し，与えられた規則により，$a_{n+1}=a_n$ となる確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=-a_n$ となる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，$a_n=1$ となる確率を p_n とすると，$a_1=1$ から $p_1=1$ であり，

$$p_2=\frac{2}{3}p_1+\frac{1}{3}(1-p_1)=\frac{2}{3},\quad p_3=\frac{2}{3}p_2+\frac{1}{3}(1-p_2)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

(2)　a_n と a_{n+1} の値について，その状態の推移をまとめると右図のようになり，



$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$$

(3)　(2)より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

これより，$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，$p_n\leqq 0.5000005$ から，

$$1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\leqq 1.000001,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\leqq 0.000001=\frac{1}{10^6},\ 3^{n-1}\geqq 10^6$$

すると，$(n-1)\log_{10}3\geqq 6$ となり，$n\geqq 1+\dfrac{6}{\log_{10}3}$ ………(＊)

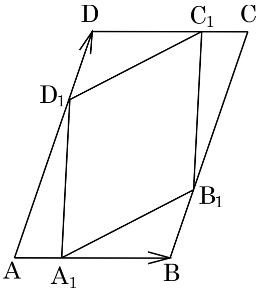
ここで，$0.47<\log_{10}3<0.48$ から $12.5=\dfrac{6}{0.48}<\dfrac{6}{\log_{10}3}<\dfrac{6}{0.47}<12.8$ となり，(＊)を満たす最小の正の整数 n は，$1+13=14$ である。

［解　説］

確率と漸化式の基本題に対数計算が加味されています。なお，確率分野の出題は，この図書館が開館して以来，初めてのことです。

3

問題のページへ



(1) 平行四辺形 ABCD について，線分 AB, BC, CD, DA を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{D_1}$ とする。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=(\vec{a}+t\vec{b})-t\vec{a}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=(1-t)\vec{b}-t\vec{a}=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=p\vec{a}+q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表すとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，

$$p=1-t,\ q=t,\ x=-t,\ y=1-t$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}=\{\vec{b}+(1-t)\vec{a}\}-(\vec{a}+t\vec{b})=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}$

これより，四角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ は平行四辺形である。

(3) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}}=-t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}$ となり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}}\\&=(1-t)\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\}+t\{-t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\}\\&=(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}+(2t-2t^2)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\\&=(1-2t)\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+(2t-2t^2)\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\\&=(1-3t+2t^3)\vec{a}+(3t-6t^2+2t^3)\vec{b}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,//\,\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$ から $1-3t+2t^3=0$ となり，$(t-1)(2t^2+2t-1)=0$

すると，$0<t<1$ から，$t=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ である。

［解 説］

平行四辺形とベクトルについての基本題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$C_1: y=4\cos^2 x$，$C_2: y=a-\tan^2 x$ を連立して，

$$4\cos^2 x=a-\tan^2 x,\ \tan^2 x+4\cos^2 x=a\cdots\cdots\cdots(*)$$

C_1 と C_2 が 2 つの共有点をもつことより，$(*)$が 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(x)=\tan^2 x+4\cos^2 x$ とおくと，

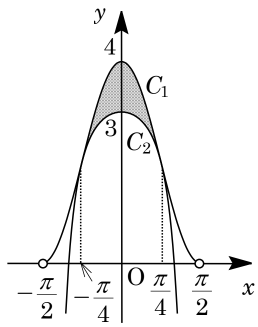
$$f'(x)=2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+8\cos x\cdot(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-8\cos x\sin x$$

$$=\frac{2\sin x(1-4\cos^4 x)}{\cos^3 x}=\frac{2\sin x(1+2\cos^2 x)(1+\sqrt{2}\cos x)(1-\sqrt{2}\cos x)}{\cos^3 x}$$

すると，$f(x)$の増減は右表のようになり，$(*)$が 2 つの実数解をもつのは，$0<a<4$ から，$a=3$ のときである。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	3	↗	4	↘	3	↗	∞

(2)　(1)より，$C_2: y=3-\tan^2 x$ となり，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は，y 軸についての対称性を考えると，



$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2 x-3+\tan^2 x)\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(2+2\cos 2x-3+\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)dx$$

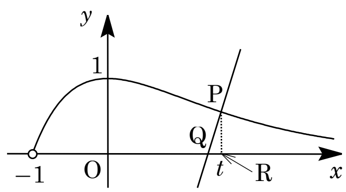
$$=2\Big[\sin 2x+\tan x-2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\Big(1+1-\frac{\pi}{2}\Big)=4-\pi$$

［解　説］

微積分の総合問題です。計算量は少なめです。

5

問題のページへ



(1)　曲線 $C: y=(x+1)e^{-x}\ (x>-1)$ に対して,

$$y'=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

ここで, C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ (t+1)e^{-t})\ (t>-1)$ における法線は, その法線ベクトルの成分を $(1,\ -te^{-t})$ とすると, その方程式は,

$$(x-t)-te^{-t}\{y-(t+1)e^{-t}\}=0$$

すると, x 軸との交点 Q は, $(x-t)+t(t+1)e^{-2t}=0$ より, $x=t-t(t+1)e^{-2t}$

これより, $\mathrm{Q}(t-t(t+1)e^{-2t},\ 0)$ となり, 点 $\mathrm{R}(t,\ 0)$ との距離 $d(t)$ は,

$$d(t)=\left|t-t(t+1)e^{-2t}-t\right|=\left|-t(t+1)e^{-2t}\right|=|t|(t+1)e^{-2t}$$

(2)　$x\geqq 0$ のとき, $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと, $f'(x)=e^x-1-x$ となり,

$$f''(x)=e^x-1\geqq 0$$

これより, $x\geqq 0$ で $f'(x)$ は単調に増加し, $f'(x)\geqq f'(0)=0$

すると, $x\geqq 0$ で $f(x)$ は単調に増加し, $f(x)\geqq f(0)=0$ となり,

$$e^x\geqq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

(3)　(i)　$-1<t<0$ のとき　$d(t)=-t(t+1)e^{-2t}$

$$d'(t)=(-2t-1)e^{-2t}+2t(t+1)e^{-2t}=(2t^2-1)e^{-2t}$$

(ii)　$t\geqq 0$ のとき　$d(t)=t(t+1)e^{-2t}$, $d'(t)=-(2t^2-1)e^{-2t}$

すると, $d(t)$ は $x=0$ で連続であり, その増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$d'(t)$		$+$		$-$		$+$		$-$
$d(t)$		↗	M_1	↘	0	↗	M_2	↘

ここで, $d\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=M_1$, $d\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=M_2$ とおくと, $M_1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}$, $M_2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}$ となり, (2)から,

$$\frac{M_1}{M_2}-1=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}e^{2\sqrt{2}}-1=(\sqrt{2}-1)^2e^{2\sqrt{2}}-1$$

$$\geqq(\sqrt{2}-1)^2\left\{1+2\sqrt{2}+\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}\right\}-1=(3-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})-1$$

$$=7-4\sqrt{2}-1=2(3-2\sqrt{2})>0$$

よって, $\dfrac{M_1}{M_2}>1$ すなわち $M_1>M_2$ となるので, $d(t)$ の最大値は,

$$M_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}$$

［解 説］

微分と増減の問題です。(3)の詰めがやや面倒なため，計算量は多めにです。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$\alpha = a+bi\ (\alpha \neq 1)$ に対して，$\dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{1}{(a-1)+bi} = \dfrac{(a-1)-bi}{(a-1)^2+b^2}$

これより，α の虚部 b が正であることと，$\dfrac{1}{\alpha-1}$ の虚部 $\dfrac{-b}{(a-1)^2+b^2}$ が負であることは同値である。

(2)　集合 S は，虚部が正の複素数 z に対し，3 点 A(1)，B$(1-iz)$，C(z^2) が一直線上にある z 全体なので，まず k を実数として，

$$z^2-1 = k(1-iz-1),\ \frac{z^2-1}{-iz} = k$$

すなわち $\dfrac{z^2-1}{-iz}$ は実数であり，$\dfrac{z^2-1}{-iz} = \overline{\left(\dfrac{z^2-1}{-iz}\right)}$ から $\dfrac{z^2-1}{-iz} = \dfrac{(\overline{z})^2-1}{i\overline{z}}$ となり，

$$\overline{z}(z^2-1)+z\{(\overline{z})^2-1\} = 0,\ z\overline{z}(z+\overline{z})-(z+\overline{z}) = 0,\ (z\overline{z}-1)(z+\overline{z}) = 0$$

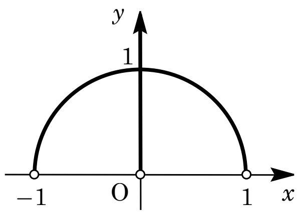
(i)　$z+\overline{z} = 0$ のとき

z は純虚数となり，虚部が正の虚軸上の点である。

(ii)　$z\overline{z}-1 = 0$ のとき

$|z|^2 = 1$ となり $|z| = 1$ である。すると，z は中心が原点の単位円周上にある虚部が正の点である。

(i)(ii)より，集合 S を図示すると，右図の太線部である。



(3)　$w = \dfrac{1}{z-1}$ とすると，(1)から w の虚部は負である。

また，$w(z-1) = 1$ から $w \neq 0$ となり，$z-1 = \dfrac{1}{w}$ から $z = 1+\dfrac{1}{w}$ ………(＊)

(i)　$z+\overline{z} = 0$ のとき

(＊)より，$1+\dfrac{1}{w}+1+\dfrac{1}{\overline{w}} = 0$ となり，$2w\overline{w}+w+\overline{w} = 0$ から $w\overline{w}+\dfrac{1}{2}w+\dfrac{1}{2}\overline{w} = 0$

$$\left(w+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},\ \left|w+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4},\ \left|w+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

すると，w は中心が点 $-\dfrac{1}{2}$ で，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある虚部が負の点である。

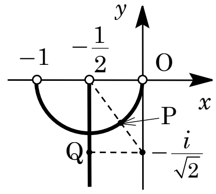
(ii)　$z\overline{z}-1 = 0$ のとき

$|z| = 1$ から，(＊)より $\left|1+\dfrac{1}{w}\right| = 1$ となり，$\left|\dfrac{w+1}{w}\right| = 1$

$$\frac{|w+1|}{|w|} = 1,\ |w+1| = |w|$$

すると，w は原点と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある虚部が負の点である。

(i)(ii)より，点 w の集合を図示すると，右図の太線部である。



さて，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$は点 w と点$-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$の距離を表し，この値が最小になるのは，点 w が右上図の点 P または点 Q に一致するときである。

すると，点$-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$と点 P との距離は$\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，点 Q との距離は$\dfrac{1}{2}$となり，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<\dfrac{1}{2}$より，求める最小値は$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$である。

［解 説］

複素数平面上の変換を題材にした標準的な問題です。(1)と(2)が(3)への巧みな誘導になっています。