1

解答解説のページへ

xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0,\quad C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0$$

が外接するとし, その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) k の値を求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これらの 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

2

解答解説のページへ

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とし，θ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ であるとき，t の値をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において，3 点 $A(-2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を α とする。2 点 $P(0,\ 5,\ 5)$，$Q(1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{OQ}$ に平行な直線を l とする。直線 l 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}$ (ただし k は実数)とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を用いて，$\overrightarrow{AS}$ を成分で表せ。

(2) 点 S が△ABC の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$p,\ q$ を定数とし，$0<p<1$ とする。

曲線 $C_1 : y=px^{\frac{1}{p}}\ (x>0)$ と，曲線 $C_2 : y=\log x+q\ (x>0)$ が，ある 1 点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとする。曲線 C_1，直線 $x=a$，直線 $x=e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，曲線 C_2，直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) S_1，S_2 を p を用いて表せ。

(3) $\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$ であることを示せ。ただし，$2.5<e<3$ を用いてよい。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

O を原点とする xy 平面において，点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ をとる。円 $x^2+y^2=1$ の，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C とし，また点 B を通り y 軸に平行な直線を l とする。2 以上の整数 n に対し，曲線 C 上に点 P，Q を$\angle\mathrm{POB}=\dfrac{\pi}{n}$，$\angle\mathrm{QOB}=\dfrac{\pi}{2n}$ を満たすようにとる。直線 AP と直線 l の交点を V とし，直線 AQ と直線 l の交点を W とする。線分 AP，線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする。また線分 PV，線分 QW，曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

i は虚数単位とする。複素数平面において，複素数 z の表す点 P を P(z) または点 z とかく。$\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 A(1)，B(ω)，C(ω^2) を頂点とする△ABC を考える。

(1) △ABC は正三角形であることを示せ。

(2) 点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また，点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする。E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　円 $C_1: x^2-2x+y^2+4y-11=0$，円 $C_2: x^2-8x+y^2-4y+k=0$ に対して，

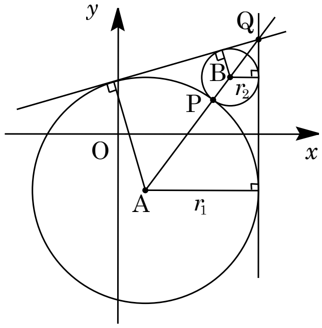
$$C_1: (x-1)^2+(y+2)^2=16,\ \ C_2: (x-4)^2+(y-2)^2=20-k$$

円 C_1 は中心 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ で半径 $r_1=4$，円 C_2 は中心 $\mathrm{B}(4,\ 2)$ で半径 $r_2=\sqrt{20-k}$ である。ただし，$20-k>0$ $(k<20)$ とする。

ここで，円 C_1 と円 C_2 が外接することより，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ となり，

$$\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=4+\sqrt{20-k},\ \ \sqrt{20-k}=1$$

これより，$20-k=1$ となり $k=19$ である。なお，この値は $k<20$ を満たす。



(2)　C_1 と C_2 の接点 P は線分 AB を $r_1:r_2=4:1$ に内分するので，その座標は，

$$\left(\frac{4\cdot4+1\cdot1}{4+1},\ \frac{4\cdot2+1\cdot(-2)}{4+1}\right)=\left(\frac{17}{5},\ \frac{6}{5}\right)$$

(3)　C_1，C_2 の共通外接線の交点 Q は直線 AB 上にあり，線分 AB を $r_1:r_2=4:1$ に外分するので，その座標は，

$$\left(\frac{4\cdot4-1\cdot1}{4-1},\ \frac{4\cdot2-1\cdot(-2)}{4-1}\right)=\left(5,\ \frac{10}{3}\right)$$

［解　説］

外接する 2 円を題材にした基本的な問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$に対して，$\theta$ が $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

$-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ となるので，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1,\quad -1<t\leqq\sqrt{2}$$

(2)　$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ となり，

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}t(3-t^2)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

$$\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta=1-2(2\sin\theta\cos\theta)^2=1-8(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$=1-8\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2=1-2(t^2-1)^2=-2t^4+4t^2-1$$

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ より，(2)から $-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t=-2t^4+4t^2-1$ となり，

$$4t^4-t^3-8t^2+3t+2=0,\quad (t-1)^2(4t^2+7t+2)=0$$

(1)から $-1<t\leqq\sqrt{2}$ なので，$t=1,\ \dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$ である。

［解 説］

誘導が非常に細かな三角方程式の基本題です。

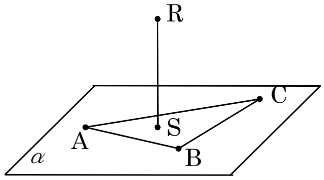
3

問題のページへ

(1)　点 P(0, 5, 5) を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線上の点 R に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1)=(k,\ k+5,\ k+5)$$

ここで，点 R から 3 点 A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α に下ろした垂線と α の交点 S に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ($l,\ m$ は実数)とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 0,\ 1)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=l(2,\ 1,\ 0)+m(2,\ 0,\ 1)-(k,\ k+5,\ k+5)+(-2,\ 0,\ 0)$$
$$=(2l+2m-k-2,\ l-k-5,\ m-k-5)$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$2(2l+2m-k-2)+(l-k-5)=0$ となり，

$$5l+4m=3k+9\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$2(2l+2m-k-2)+(m-k-5)=0$ となり，

$$4l+5m=3k+9\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$l=m=\dfrac{k+3}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{k+3}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{k+3}{3}(4,\ 1,\ 1)$

(2)　点 S が△ABC の内部または周にある条件は，$l\geqq 0$，$m\geqq 0$，$l+m\leqq 1$ より，

$$\frac{k+3}{3}\geqq 0,\quad \frac{2(k+3)}{3}\leqq 1$$

よって，$0\leqq k+3\leqq\dfrac{3}{2}$ から，$-3\leqq k\leqq -\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

空間図形の問題です。平面 α を扱うのに，方程式とパラメータ表示という 2 つの方法がありますが，(2)の設問をみて後者を選択しました。

$\boxed{4}$

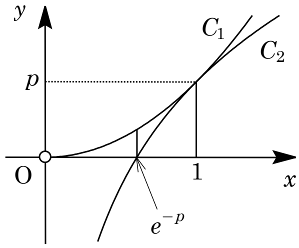
問題のページへ

(1)　曲線 $C_1 : y = px^{\frac{1}{p}}\ (x > 0) \cdots\cdots$①と $C_2 : y = \log x + q \cdots\cdots$②が，点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとき，①から $y' = x^{\frac{1}{p}-1}$，②から $y' = \dfrac{1}{x}$ なので，

$$a^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots③,\quad pa^{\frac{1}{p}} = \log a + q \cdots\cdots\cdots④$$

③から $a^{\frac{1}{p}} = 1$ となり $a = 1$，④に代入して $p = \log 1 + q$ から，$q = p$ となる。

(2)　曲線 C_1，直線 $x = 1$，直線 $x = e^{-p}$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S_1 は，



$$S_1 = \int_{e^{-p}}^{1} px^{\frac{1}{p}}\,dx = \frac{p^2}{1+p}\Big[\ x^{\frac{1+p}{p}}\ \Big]_{e^{-p}}^{1}$$

$$= \frac{p^2}{1+p}(1 - e^{-1-p})$$

また，曲線 C_2，直線 $x = 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S_2 は，

$$S_2 = \int_{e^{-p}}^{1}(\log x + p)\,dx = \big[\,x\log x - x\,\big]_{e^{-p}}^{1} + p(1 - e^{-p})$$

$$= -e^{-p}(-p) - (1 - e^{-p}) + p(1 - e^{-p}) = e^{-p} + p - 1$$

(3)　$0 < p < 1$ において，$f(p) = 4S_2 - 3S_1$ とおくと，(2)より，

$$f(p) = 4(e^{-p} + p - 1) - \frac{3p^2}{1+p}(1 - e^{-1-p})$$

$$= \frac{1}{p+1}\{4(p+1)e^{-p} + 4p^2 - 4 - 3p^2 + 3p^2e^{-p-1})$$

$$= \frac{1}{p+1}\Big\{p^2 - 4 + \Big(4p + 4 + \frac{3p^2}{e}\Big)e^{-p}\Big\}$$

ここで，$\dfrac{5}{2} < e < 3$ より $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{5}$ となるので，

$$f(p) > \frac{1}{p+1}\{p^2 - 4 + (4p + 4 + p^2)e^{-p}\} = \frac{(p+2)e^{-p}}{p+1}\{(p-2)e^{p} + p + 2\}$$

そこで，$g(p) = (p-2)e^{p} + p + 2$ とおくと，

$$g'(p) = e^{p} + (p-2)e^{p} + 1 = (p-1)e^{p} + 1,\quad g''(p) = e^{p} + (p-1)e^{p} = pe^{p}$$

$0 < p < 1$ において，$g''(p) > 0$ から $g'(p) > g'(0) = -1 + 1 = 0$ となり，

$$g(p) > g(0) = -2 + 2 = 0$$

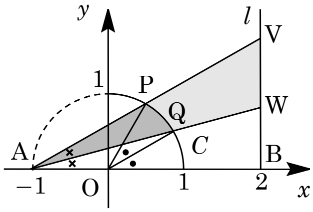
よって，$0 < p < 1$ において $f(p) > 0$ となり，$4S_2 > 3S_1$ すなわち $\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)は結論を変形して処理しましたが，かなり面倒です。

5

問題のページへ



(1)　右図において，$\angle\mathrm{POB}=\dfrac{\pi}{n}$，$\angle\mathrm{QOB}=\dfrac{\pi}{2n}$ のとき，線分 AP, 線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$，線分 PV, 線分 QW, 曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とおく。

$\angle\mathrm{PAB}=\dfrac{\pi}{2n}$，$\angle\mathrm{QAB}=\dfrac{\pi}{4n}$，$\mathrm{AB}=3$ より，

$$S(n)+T(n)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\tan\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{9}{2}\left(\tan\frac{\pi}{2n}-\tan\frac{\pi}{4n}\right)$$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{4n}$ とおくと $n=\dfrac{\pi}{4\theta}$ となり，

$$n\{S(n)+T(n)\}=\frac{\pi}{4\theta}\cdot\frac{9}{2}(\tan2\theta-\tan\theta)=\frac{9}{8}\pi\left(\frac{\tan2\theta}{2\theta}\cdot2-\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$

$n\to\infty$ のとき $\theta\to0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}n\{S(n)+T(n)\}=\frac{9}{8}\pi(1\cdot2-1)=\frac{9}{8}\pi$$

(2)　$\dfrac{T(n)}{S(n)}=\dfrac{S(n)+T(n)}{S(n)}-1=\dfrac{n\{S(n)+T(n)\}}{nS(n)}-1$ ……$(*)$となり，

$$S(n)=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{\pi}{4n}$$

$nS(n)=\dfrac{\pi}{4\theta}\cdot\dfrac{1}{2}(\sin4\theta-\sin2\theta)+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{\sin4\theta}{4\theta}\cdot4-\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2\right)+\dfrac{\pi}{4}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nS(n)=\frac{\pi}{8}(1\cdot4-1\cdot2)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

よって，$(*)$と(1)から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\frac{9}{8}\pi\cdot\frac{2}{\pi}-1=\frac{5}{4}$ となる。

［解　説］

図形量の極限についての基本的な問題です。(2)は(1)の結果を利用する方法で記しました。

6

問題のページへ

(1)　$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，A(1)，B(ω)，C(ω^2) を頂点とする△ABC について，

$$\omega^2-1=(\omega+1)(\omega-1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\omega-1)=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\omega-1)$$

これより,頂点 A のまわりに辺 AB を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると辺 AC に一致するので,

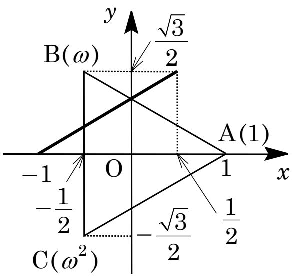
AB $=$ AC かつ $\angle$BAC $=\dfrac{\pi}{3}$ から，△ABC は正三角形である。

(2)　辺 AC 上を動く点 z を，$z=t\omega^2+(1-t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおくと,

$$-z=-t\omega^2-(1-t)=t(-\omega^2)+(1-t)(-1)$$

これより，点 $-z$ が描く図形は，点 -1 と点 $-\omega^2$ を両端とする線分，すなわち辺 AC を原点対称した線分である。

図示すると，右図の太線部となる。



(3)　辺 AB 上を動く点 z を $z_1=s\omega+(1-s)$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とし，点 ${z_1}^2$ が描く図形を E_1 とする。また，辺 AC 上を動く点 z を $z_2=t\omega^2+(1-t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とし，点 ${z_2}^2$ が描く図形を E_2 とする。

さて，E_1 と E_2 の共有点は，${z_1}^2={z_2}^2$ より $z_1=\pm z_2$ となり，

(i)　$z_1=z_2$ のとき

$s\omega+(1-s)=t\omega^2+(1-t)$ より，$s(\omega-1)=t(\omega^2-1)$ となり，$\omega\neq 1$ から，

$$s=t(\omega+1),\ \ t\omega+t-s=0$$

ω は虚数より $t=t-s=0$ となり，$s=t=0$ から $z_1=z_2=1$ なので，${z_1}^2={z_2}^2=1$

(ii)　$z_1=-z_2$ のとき

$s\omega+(1-s)=-t\omega^2-(1-t)$ より，$s(\omega-1)+2=-t(\omega^2-1)$

ここで，$\omega^3=1$ かつ $\omega\neq 1$ から $\omega^2+\omega+1=0$ となり，$\omega^2=-\omega-1$ より,

$$s(\omega-1)+2=-t(-\omega-2),\ \ (s-t)\omega-2t-s+2=0$$

ω は虚数より $s-t=-2t-s+2=0$ となり，$s=t=\dfrac{2}{3}$ から,

$$z_1=z_2=\frac{2}{3}\omega+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ \ {z_1}^2={z_2}^2=-\frac{1}{3}$$

(i)(ii)より，E_1 と E_2 の共有点は，点 1 と点 $-\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

複素数平面上の軌跡の問題です。(1)は 3 辺の長さが等しいことを示しても構いません。また，(2)と(3)はパラメータ表示しましたが，図形的な解法も考えられます。