1

解答解説のページへ

xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする△ABC の内接円を T とする。点 $\mathrm{D}(0,\ -1)$ を通り，傾きが正である直線を $l : y = ax - 1$ とする。

(1)　円 T の半径を r とする。r を求めよ。

(2)　直線 l と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち，D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。

(3)　直線 l が円 T に接するとする。このとき，(2)で求めた点 E を通り，x 軸と平行な直線が，円 T に接することを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xy 平面において，円 $x^2+y^2=1$ の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また，直線 $y=x$ の $x \leqq 0$ を満たす部分を C_2 とする。C_1 上の点 A，C_2 上の点 B および点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ について，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　点 B の x 座標を θ を用いて表せ。

(2)　線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする xy 平面上に 2 直線 $l : y=\sqrt{3}x$，$m : y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ がある。正の整数 n に対して，l 上に点 $\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{3}n)$ をとり，m 上に点 $\mathrm{Q}_n\left(x_n,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる。ただし，$x_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は次の条件(I), (II)を満たすとする。

(I)　$x_1=1$ である。

(II)　$n \geqq 2$ のとき，x_n は，Q_{n-1} を通り l と平行な直線と, x 軸との交点の x 座標である。

また，正の整数 n に対して，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を a_n とする。

(1)　x_n を n を用いて表せ。

(2)　a_n を n を用いて表せ。

(3)　正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ と定める。S_n を n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ を，$f(\theta)=\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g(\theta)=\sin 2\theta$ と定める。xy 平面上の曲線 C が, 媒介変数 θ を用いて

$$x=f(\theta),\ \ y=g(\theta)\ \ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている。

(1)　次の定積分 I_1，I_2，I_3 の値を求めよ。

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta,\ \ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos 2\theta\,d\theta,\ \ I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

(3)　曲線 C, x 軸および y 軸で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が，$a_1=\dfrac{c}{1+c}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。ただし，cは正の実数である。

(1)　a_2，a_3を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$を求めよ。

6

解答解説のページへ

i は虚数単位とする。複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す。複素数平面上で，次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+9=0$$

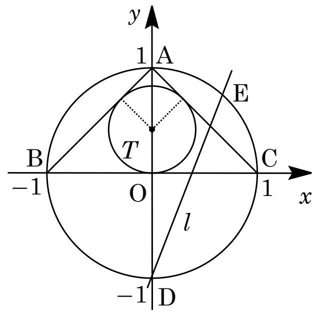
以下の問いに答えよ。

(1) 図形 C を複素数平面上に描け。

(2) 複素数 w に対して，$\alpha=w+\overline{w}-1$，$\beta=w+\overline{w}+1$ とする。w，α，β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P，A，B とする。点 P は C 上を動くとする。△PAB の面積が最大となる複素数 w，およびそのときの△PAB の外接円の中心と半径を求めよ。

1

問題のページへ



(1) 3 点 $A(0,\ 1)$，$B(-1,\ 0)$，$C(1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ に対して，その内接円 T の半径を r とすると，

$AB = AC = \sqrt{2}$，$BC = 2$ から，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)r = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1,\ (\sqrt{2}+1)r = 1$$

これより，$r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ となる。

(2) 直線 $l : y = ax - 1$ ……①と円 $x^2 + y^2 = 1$ を連立して，

$$x^2 + (ax-1)^2 = 1,\ (a^2+1)x^2 - 2ax = 0$$

$x \neq 0$ の解は $x = \dfrac{2a}{a^2+1}$ となり，①から $y = a\cdot\dfrac{2a}{a^2+1} - 1 = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

よって，$E\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ となる。

(3) (1)から，二等辺三角形 ABC の内接円 T の中心の座標は $(0,\ \sqrt{2}-1)$，半径は $\sqrt{2}-1$ であり，$l : ax - y - 1 = 0\ (a > 0)$ が円 T に接する条件は，

$$\frac{|a\cdot 0 - (\sqrt{2}-1) - 1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}-1,\ \sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{a^2+1}$$

これより，$a^2 + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = (2+\sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$ となり，

$$\frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{4+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8} = -2+2\sqrt{2}$$

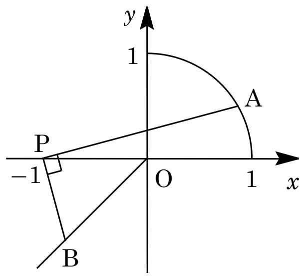
すると，点 E を通り x 軸と平行な直線の方程式は $y = -2 + 2\sqrt{2}$ ……②であり，T の中心 $(0,\ \sqrt{2}-1)$ との距離は，$(-2+2\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ となり，T の半径に等しい。よって，直線②は内接円 T に接する。

［解 説］

円と直線についての基本題です。(1)は面積を利用しましたが，他の方法もいろいろ考えられます。

2

問題のページへ



(1)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$t \leqq 0$ として，$A(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$B(t,\ t)$，

$P(-1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{PA}=(\cos\theta+1,\ \sin\theta),\ \overrightarrow{PB}=(t+1,\ t)$$

ここで，$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ となり，

$$(t+1)(\cos\theta+1)+t\sin\theta=0$$

$$(\sin\theta+\cos\theta+1)t+(\cos\theta+1)=0$$

$\sin\theta+\cos\theta+1>0$ から $t=-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ となり，この値は $t\leqq 0$ を満たす。

よって，点 B の x 座標は $x=-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ である。

(2)　線分 AB の中点の x 座標が 0 以上より，$\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}\right)\geqq 0$ となり，

$$\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)-(\cos\theta+1)\geqq 0,\ \sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1\geqq 0$$

$$\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\geqq 0,\ \sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta\geqq 0$ となり，

(i)　$\sin\theta=0$ $(\theta=0)$ のとき　$(*)$は成立する。

(ii)　$\sin\theta>0$ $\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　$(*)$から $\cos\theta-\sin\theta\geqq 0$

すると，$\cos\theta\geqq\sin\theta$ から $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ となる。

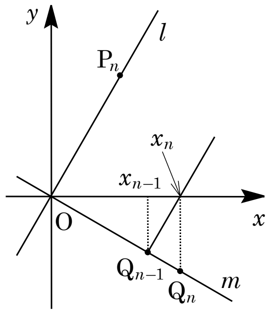
(i)(ii)より，求める θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ である。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題です。基本的な内容ですが，(2)の詰めは要注意です。

3

問題のページへ



(1)　直線 $l: y=\sqrt{3}x$ 上に点 $\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{3}n)$，$m: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 上に点 $\mathrm{Q}_n\left(x_n,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$をとる。

$n \geqq 2$ のとき，点 $\mathrm{Q}_{n-1}\left(x_{n-1},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}\right)$を通り l と平行な直線の方程式は，

$$y+\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}=\sqrt{3}(x-x_{n-1})$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_n より，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}=\sqrt{3}(x_n-x_{n-1}),\quad x_{n-1}=3(x_n-x_{n-1})$$

これより $x_n=\dfrac{4}{3}x_{n-1}$ となり，$x_1=1$ から $x_n=x_1\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ である。

(2)　$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を a_n とすると，$l \perp m$ から，

$$a_n=\frac{1}{2}\mathrm{OP}_n\cdot\mathrm{OQ}_n=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+3n^2}\cdot\sqrt{{x_n}^2+\frac{1}{3}{x_n}^2}=\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}|x_n|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{\sqrt{3}}n\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{\sqrt{3}}{2}n\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

(3)　(2)より，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{3}\right)^k$ となり，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{3}\right)^k$ とおくと，

$$T_n-\frac{4}{3}T_n=1\cdot\frac{4}{3}+(2-1)\left(\frac{4}{3}\right)^2+\cdots+\{n-(n-1)\}\left(\frac{4}{3}\right)^n-n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1}-n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}=4\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right\}-n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

$$=\left(4-\frac{4}{3}n\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n-4$$

すると，$-\dfrac{1}{3}T_n=\left(4-\dfrac{4}{3}n\right)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-4$ から，$T_n=4(n-3)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+12$ となり，

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}T_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{4(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n+12\right\}=2\sqrt{3}\left\{(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n+3\right\}$$

［解　説］

数列の図形への応用題です。平易な内容ですが，(3)で(等差)×(等比)のタイプの和が出現しますので，計算ミスを防ぐために細心の注意が必要です。

4

問題のページへ

(1)　まず，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$となり，

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)\sin\theta\,d\theta=\Big[-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{2}{3}\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\Big)+\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\Big)=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta-\cos^2 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 4\theta}{2}\Big)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos 4\theta+2\cos 2\theta-1)\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{4}\sin 4\theta+\sin 2\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}$$

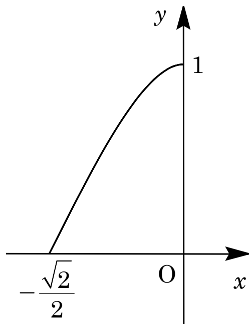
(2)　$C: x=\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\sin 2\theta$において，

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta$$

よって，$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}$となる。

さて，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$における x, y の増減は右表のようになる。そして，$\theta=0$のとき$\frac{dy}{dx}=2$，$\theta=\frac{\pi}{4}$のとき$\frac{dy}{dx}=0$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$のとき$\frac{dy}{dx}>0$に注意して曲線Cの概形を描くと，右図の曲線となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	1	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	0
$\frac{dy}{d\theta}$	2	$+$	0
y	0	↗	1



(3)　曲線C, x軸およびy軸で囲まれた図形を, y軸のまわりに1回転してできる立体の体積Vは, (1)の結果を利用して,

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\cdot 2\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\Big)\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=2\pi\Big\{\Big(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}\Big)-\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big\}=\Big(\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}\Big)\pi$$

［解 説］

パラメータ曲線の y 軸回転体について，その体積計算の問題です。(1)の定積分の値が，ストレートに適用できます。

5　　　　問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{c}{1+c}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-\dfrac{c}{1+c}}=\frac{1+c}{2+c},\quad a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\dfrac{1+c}{2+c}}=\frac{2+c}{3+c}$$

(2)　(1)から$a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}$と推測でき，この式が正しいことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=\dfrac{1-1+c}{1+c}=\dfrac{c}{1+c}$より成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k=\dfrac{k-1+c}{k+c}$と仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{k-1+c}{k+c}}=\frac{k+c}{k+1+c}$$

よって，$n=k+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}$である。

(3)　まず，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\Big)$とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k}-1&=\frac{k+c}{k+1+c}\cdot\frac{k+c}{k-1+c}-1=\frac{(k+c)^2-(k+1+c)(k-1+c)}{(k+1+c)(k-1+c)}\\&=\frac{(k+c)^2-\{(k+c)^2-1\}}{(k+1+c)(k-1+c)}=\frac{1}{(k+1+c)(k-1+c)}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+k-1}-\frac{1}{c+k+1}\Big)\end{aligned}$$

これより，$S_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{c+k-1}-\frac{1}{c+k+1}\Big)$となり，

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+2}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+3}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+4}\Big)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+n-2}-\frac{1}{c+n}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+n-1}-\frac{1}{c+n+1}\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c+n}+\frac{1}{c+n+1}\Big)\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\Big)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}\Big)=\frac{2c+1}{2c(c+1)}$である。

［解　説］

誘導から予測できますが，推測→証明のタイプの漸化式が題材になっています。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$z\bar{z}+(1+3i)z+(1-3i)\bar{z}+9=0\cdots\cdots(*)$に対して，$\gamma=1-3i$ とおくと，

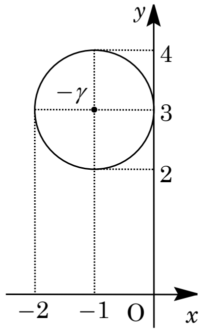
$$\bar{\gamma}=1+3i,\ \gamma\bar{\gamma}=1^2+(-3)^2=10$$

$(*)$から，$z\bar{z}+\bar{\gamma}z+\gamma\bar{z}+\gamma\bar{\gamma}-1=0$，$(z+\gamma)(\bar{z}+\bar{\gamma})=1$ となり，

$$|z+\gamma|^2=1,\ |z-(-\gamma)|=1$$

よって，点 z は点$-\gamma=-1+3i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

そこで，点 z の全体が表す図形を C とすると，C は複素数平面上で右図のようになる。



(2)　複素数 w に対して，$\alpha=w+\bar{w}-1$，$\beta=w+\bar{w}+1$ とし，P(w)，A(α)，B(β) とおく。そして，$w=x+yi$ とおくと，

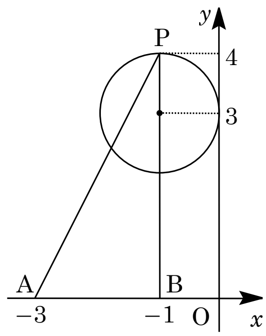
$$\alpha=(x+yi)+(x-yi)-1=2x-1,\ \beta=(x+yi)+(x-yi)+1=2x+1$$

これより，A(α)，B(β) はともに実軸上にあり，

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=|(2x+1)-(2x-1)|=2$$

すると，△PAB の面積が最大となるのは，点 P が C 上を動くことから，P と実軸との距離が最大になるとき，すなわち$w=-1+4i$ のときである。

そして，$x=-1$ から $\alpha=-2-1=-3$，$\beta=-2+1=-1$ となり，△PAB は$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形である。



よって，△PAB の外接円の中心は，PA の中点となり，

$$\frac{1}{2}\{(-1+4i)+(-3)\}=-2+2i$$

また，半径は，$|(-2+2i)-(-3)|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ となる。

［解　説］

複素数平面上の円のついての標準的な問題です。(1)は，結論を承知のうえでの変形ですが，普通に$z=x+yi$ を代入しても構いません。