1

解答解説のページへ

$k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y=x^2-kx$ と直線 $l: y=(\tan\theta)x$ の交点のうち，原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を l_1 とし，点 P における接線を l_2 とする。直線 l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，直線 l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を求めよ。

(2) $\tan\theta$ を求めよ。

(3) 直線 l_1 と l_2 の交点を Q とする。$\angle\mathrm{PQO}=\alpha$ （ただし $0\leqq\alpha\leqq\pi$ ）とするとき，$\tan\alpha$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z,\ M$ は正の実数とする。$\dfrac{x}{a}$，$\dfrac{y}{b}$，$\dfrac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき，$\dfrac{x+y+z}{a+b+c} \leqq M$ であることを示せ。

(2)　$\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

(3)　n が正の整数のとき，$1 < \dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ および $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}$ が成り立つとする。$0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数 s，t に対し，辺 OA を $s:1-s$ に内分する点を D とし，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 F, G をとり，線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし，その交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t=s$ であることを示し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるとき，$\cos\theta$ を s を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ かつ $\sqrt{3}\,\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$ であるとき，s の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=1+\sin x,\quad g(x)=-1-\cos x$$

と定める。

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす x を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$，曲線 $y=g(x)$，直線 $x=0$ および直線 $x=\pi$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を$a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t>0$のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t-1}{t} \leqq e^t$であることを示せ。

(2)　数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$を

$$x_n = \log(e^{a_n}+1),\quad y_n = \log(e^{a_n}-1),\quad z_n = y_n + \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_nはnによらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$を求めよ。

6

解答解説のページへ

$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

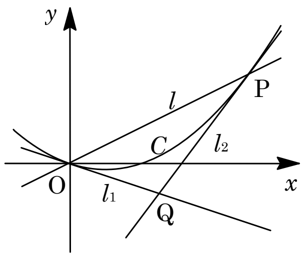
(1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2) A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　放物線 $C: y = x^2 - kx$ に対して，$y' = 2x - k$

　C の点 O における接線 l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ より $-k = -\dfrac{1}{3}$ となり，$k = \dfrac{1}{3}$ である。この値は $k > 0$ を満たしている。

(2)　(1)より，$C: y = x^2 - \dfrac{1}{3}x$ で，$y' = 2x - \dfrac{1}{3}$

　ここで，直線 $l: y = (\tan\theta)x$ と連立すると，

$$x^2 - \frac{1}{3}x = (\tan\theta)x\,,\quad x\left(x - \frac{1}{3} - \tan\theta\right) = 0$$

　これより，O と異なる交点 P の x 座標は，$x = \dfrac{1}{3} + \tan\theta$ となる。

　すると，点 P における接線 l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ から，

$$2\left(\frac{1}{3} + \tan\theta\right) - \frac{1}{3} = \tan 2\theta,\quad \frac{1}{3} + 2\tan\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \cdots\cdots\cdots(*)$$

　そして，$(1 + 6\tan\theta)(1 - \tan^2\theta) = 6\tan\theta$ から，$6\tan^3\theta + \tan^2\theta - 1 = 0$ となり，

$$(2\tan\theta - 1)(3\tan^2\theta + 2\tan\theta + 1) = 0$$

　これより $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ である。この値は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ $(0 < \tan\theta < 1)$ を満たしている。

(3)　x 軸の正の向きと，l_1，l_2 のなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とおくと，$(*)$より，

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{3},\quad \tan\theta_2 = \tan 2\theta = \frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

　ここで，l_1 と l_2 の交点 Q に対し，$\angle\mathrm{PQO} = \alpha$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とすると，$\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -3$$

［解 説］

　放物線の接線を題材とし，三角関数を用いて，2 直線のなす角の処理を問う基本事項の確認問題です。

2

問題のページへ

(1)　正の実数 a, b, c, x, y, z, M に対して，$\dfrac{x}{a} \leqq M$，$\dfrac{y}{b} \leqq M$，$\dfrac{z}{c} \leqq M$ のとき，

$$x \leqq aM,\ y \leqq bM,\ z \leqq cM$$

すると，$x+y+z \leqq aM+bM+cM=(a+b+c)M$ となり，

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq \frac{(a+b+c)M}{a+b+c}=M$$

なお，等号は $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=M$ のときに成立する。

(2)　まず，$0<\log_5 2<\log_5 3$ より，$\dfrac{1}{\log_5 2}>\dfrac{1}{\log_5 3}$ となるので，

$$\log_2 5>\log_3 5 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　n が正の整数のとき，$P=1+\log_2 5+(\log_2 5)^n-\{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n\}$ とおくと，

$$P=(\log_2 5-\log_3 5)+\{(\log_2 5)^n-(\log_3 5)^n\}$$

①より $\log_2 5>\log_3 5>\log_3 3=1$ なので，$(\log_2 5)^n>(\log_3 5)^n$ となり，$P>0$

$$1+\log_2 5+(\log_2 5)^n>1+\log_3 5+(\log_3 5)^n$$

$$\frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}>1 \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$Q=2\log_3 5-\log_2 5$ とおくと，

$$Q=\frac{2}{\log_5 3}-\frac{1}{\log_5 2}=\frac{2\log_5 2-\log_5 3}{(\log_5 3)(\log_5 2)}=\frac{\log_5 4-\log_5 3}{(\log_5 3)(\log_5 2)}>0$$

すると，$2\log_3 5>\log_2 5$ より，$0<\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5}<2 \leqq 2^n$ となり，さらに，

$$0<\frac{1}{1}<2^n,\ 0<\frac{(\log_2 5)^n}{(\log_3 5)^n}=\left(\frac{\log_2 5}{\log_3 5}\right)^n<2^n$$

(1)の結果を用いて，$\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}<2^n \cdots\cdots\cdots ③$

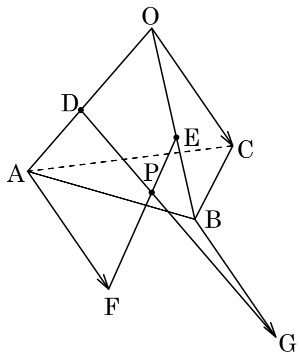
②③より，$1<\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}<2^n$

［解 説］

不等式の証明問題です。(3)の左の不等式は，(1)との関連を考えず普通に解いています。右の不等式は，(1)の結果を利用するために $Q=2\log_3 5-\log_2 5$ を設定しました。

3

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}$　$(0<s<1,\ 0<t<1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{b}+\vec{c}$

さて，$\mathrm{DP}:\mathrm{PG}=1-k:k$，$\mathrm{EP}:\mathrm{PF}=1-l:l$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OG}}=ks\vec{a}+(1-k)(\vec{b}+\vec{c})$$
$$=ks\vec{a}+(1-k)\vec{b}+(1-k)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OF}}=lt\vec{b}+(1-l)(\vec{a}+\vec{c})$$
$$=(1-l)\vec{a}+lt\vec{b}+(1-l)\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は1次独立なので，①②から，

$ks=1-l\cdots\cdots\cdots$③，$1-k=lt\cdots\cdots\cdots$④，$1-k=1-l\cdots\cdots\cdots$⑤

⑤より$k=l$を③④に代入すると，$ls=1-l$かつ$1-l=lt$から，$ls=lt$となる。

ここで，$l=0$とすると$k=0$となり，③が成立しないことより，$t=s$である。

このとき，③から$ks=1-k$より$k=\dfrac{1}{s+1}$となるので，①に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{s+1}\vec{a}+\frac{s}{s+1}\vec{b}+\frac{s}{s+1}\vec{c}=\frac{s}{s+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}-s\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$なので$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$となり，

$$(\vec{a}-s\vec{b}+\vec{c})\cdot(-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$とおいても一般性を失わないので，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$$

すると，⑥より，$-s+\cos\theta+\cos\theta+s^2\cos\theta-s-s\cos\theta-s\cos\theta+\cos\theta+1=0$

$$(s^2-2s+3)\cos\theta=2s-1,\ \cos\theta=\frac{2s-1}{s^2-2s+3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

(3) (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{s}{s+1}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left(\frac{s}{s+1}\right)^2|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\left(\frac{s}{s+1}\right)^2(1+1+1+2\cos\theta+2\cos\theta+2\cos\theta)$$
$$=3\left(\frac{s}{s+1}\right)^2(1+2\cos\theta)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$なので，⑦を代入して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=3\left(\frac{s}{s+1}\right)^2\left(1+\frac{4s-2}{s^2-2s+3}\right)=3\left(\frac{s}{s+1}\right)^2\cdot\frac{s^2+2s+1}{s^2-2s+3}=\frac{3s^2}{s^2-2s+3}$$

さらに，$\sqrt{3}\,\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$から$3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1$となるので，$\dfrac{9s^2}{s^2-2s+3}=1$より，

$$8s^2+2s-3=0,\ (4s+3)(2s-1)=0$$

よって，$0<s<1$ から，$s=\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。問題の状況設定がやや繁雑ですが，誘導に従えば，方針に迷うことはないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

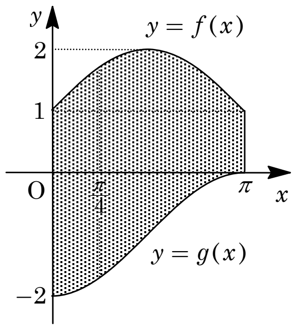
(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$f(x) = 1 + \sin x$，$g(x) = -1 - \cos x$

ここで，$|f(x)| = |g(x)|$ より，$1 + \sin x = 1 + \cos x$ となり，

$$\sin x - \cos x = 0,\ \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

すると，$-\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ より $x - \frac{\pi}{4} = 0$，すなわち $x = \frac{\pi}{4}$ である。

(2)　2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$，および 2 直線 $x = 0$ と $x = \pi$ で囲まれる右図の網点部を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，(1)より，



$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x)\}^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (-1 - \cos x)^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 + \sin x)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos x + \cos^2 x)dx + \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 + 2\sin x + \sin^2 x)dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx + \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\pi^2 + \pi\left[2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \pi\left[-2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)\pi + \left(2 + \sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{2}\pi^2 + \left(2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\right)\pi$$

［解 説］

回転体の体積についての基本問題です。(1)の誘導の意味も明快です。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x$ とすると $f'(x)=e^x$ となり，$0\leqq x\leqq t$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c)\quad(0<c<t)$$

すると，$\dfrac{e^t-1}{t}=e^c$ となり，$1=e^0<e^c<e^t$ から，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$ である。

(2)　$a_n=\dfrac{1}{2^n}$ より，$n\geqq 2$ において，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ すなわち $2a_n=a_{n-1}$ ………(＊)

さて，$z_n=\log(e^{a_n}-1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log(e^{a_k}+1)$ より，(＊)を用いると，

$$\begin{aligned}
z_n&=\log(e^{a_n}-1)+\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{2a_n}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_{n-1}}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{2a_{n-1}}-1)=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-2}}-1)
\end{aligned}$$

同様に繰り返すと，$z_n=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_1}-1)=\log(e^{2a_1}-1)=\log(e-1)$

よって，z_n は n によらない定数である。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)$ とおくと，$S_n=\log\Big(\dfrac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\dfrac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\dfrac{e^{a_n}+1}{2}\Big)$ となり，

$$\begin{aligned}
S_n+\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)&=\log\Big(\frac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{e^{a_n}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)\\
&=\log\frac{(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

すると，(2)より，$S_n+\log\Big(\dfrac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\dfrac{e-1}{2^{n+1}}$ となり，

$$\begin{aligned}
S_n&=\log\frac{e-1}{2^{n+1}}-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\frac{e-1}{2^n(e^{a_n}-1)}=\log(e-1)+\log\Big(\frac{a_n}{e^{a_n}-1}\Big)\\
&=\log(e-1)-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\Big)
\end{aligned}$$

また，(1)から $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ となり，また $n\to\infty$ のとき $a_n\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)=\lim_{n\to\infty}S_n=\log(e-1)-\log 1=\log(e-1)$ である。

［解 説］

無限級数の和を求める問題です。(1)と(2)の結果が(3)にうまく繋がっています。ただ，(2)の記述はやや雑ですが。

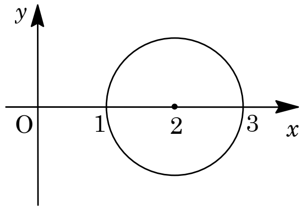
6

問題のページへ

(1)　複素数 z に対して，$|z|^2+3=2(z+\bar{z})$ より，

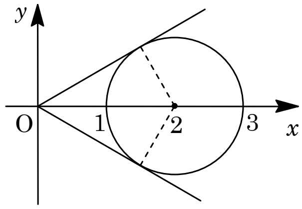
$$|z|^2-2(z+\bar{z})+3=0,\ (z-2)(\bar{z}-2)=1$$

よって，$|z-2|^2=1$ より $|z-2|=1$ となり，z 全体の集合 A は，点 2 を中心とする半径 1 の円である。複素数平面上に図示すると，右図のようになる。



(2)　集合 A に原点から接線を引いたとき，その 2 本の接線と実軸の正の向きとのなす角は $\pm\frac{\pi}{6}$ である。

これより，z の偏角を θ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とすると，右図より，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ である。



(3)　z^{60} の偏角は 60θ となり，(2)より $-10\pi\leqq 60\theta\leqq 10\pi$ である。

すると，z^{60} が正の実数となるとき，$60\theta=2n\pi$ $(-5\leqq n\leqq 5)$ と表せる。

(i)　$60\theta=0$ のとき　$\theta=0$ より $z=1,\ 3$ となり，z は 2 個存在する。

(ii)　$60\theta=\pm 2\pi$ のとき　$\theta=\pm\frac{\pi}{30}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iii)　$60\theta=\pm 4\pi$ のとき　$\theta=\pm\frac{\pi}{15}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iv)　$60\theta=\pm 6\pi$ のとき　$\theta=\pm\frac{\pi}{10}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(v)　$60\theta=\pm 8\pi$ のとき　$\theta=\pm\frac{2}{15}\pi$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(vi)　$60\theta=\pm 10\pi$ のとき　$\theta=\pm\frac{\pi}{6}$ より，z は $1+1=2$ 個存在する。

(i)～(vi)より，求める z の個数は，$2+4\times 4+2=20$ である。

［解　説］

複素数平面上の円を題材とした問題です。(1)の共役複素数を用いた変形は，必修事項の 1 つです。