1

解答例のページへ

正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α，β が次の条件を満たすように動く。

条件：座標平面上の放物線 $C : y = k(x - \alpha)(\beta - x)$ の頂点は $(-3,\ 1)$ であり，C は y 軸と $-2 \leqq y \leqq 0$ の範囲で交わる。

このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\ \text{は}\ 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n\ \text{を満たす整数}\}$$

から相異なる 3 点を選ぶ。ただし，どの 3 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1)　p_5 を求めよ。

(2)　m を 2 以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

3

解答例のページへ

$0<a<1$ とし，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{a}{8}(x-1)^2+\dfrac{2}{a}-3$ と定める。また，関数 $g(x)$ を次のように定める。整数 n に対し，

$$2n \leqq x < 2n+1 \text{ のとき} \qquad g(x)=x-2n$$
$$2n+1 \leqq x < 2n+2 \text{ のとき} \qquad g(x)=-x+2n+2$$

とする。

(1)　$x \geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ を示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ とする。座標平面上の $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの $x \geqq 0$ の範囲における共有点の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める。C 上の 2 点 P，Q に対する以下の条件(＊)を考える。

条件(＊)　原点 O，点 P，点 Q は相異なり，C の O，P，Q における接線のうち，どの 2 本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2 直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

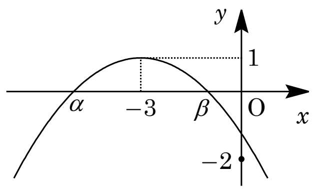
(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ とする。$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を $\tan\theta$ を用いて表せ。

(2)　条件(＊)を満たす P, Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(3)　k が(2)で定まる範囲にあるとする。P，Q が条件(＊)を満たすように動くとき，C の O，P，Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし，3 本の接線が 1 点で交わるときは $S=0$ とする。$M=4m$ となる k の値を求めよ。

1

問題のページへ



$k>0$ のとき，放物線 $C : y=k(x-\alpha)(\beta-x)$ は，x^2 の係数が $-k$ で，x 軸との交点は $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ である。

さて，C の頂点は $(-3,\ 1)$ より，

$$C : y=-k(x+3)^2+1\cdots\cdots\cdots①$$

x 軸との交点は，①から $-k(x+3)^2+1=0$ となり，

$$(x+3)^2=\frac{1}{k},\ x=-3\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$$

これより，$\alpha=-3-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，$\beta=-3+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdots\cdots\cdots②$

また，y 軸との交点は，①から $y=-9k+1$ となり，$-2\leqq-9k+1\leqq0$ より，

$$-3\leqq-9k\leqq-1,\ \frac{1}{9}\leqq k\leqq\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

さて，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，②から，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}k(x-\alpha)(\beta-x)\,dx=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{k}{6}\Big(\frac{2}{\sqrt{k}}\Big)^3=\frac{4}{3\sqrt{k}}\cdots\cdots\cdots④$$

すると，③から $3\leqq\dfrac{1}{k}\leqq9$ なので，$\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\leqq\dfrac{4}{3\sqrt{k}}\leqq\dfrac{4}{3}\cdot3$ となり，④より，

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}\leqq S\leqq4$$

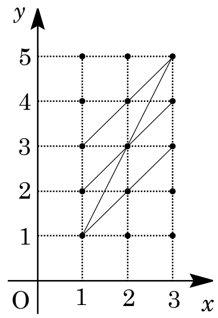
［コメント］

放物線を題材とした面積についての基本題です。いろいろな記述方法がありますが，解答例では，頂点の座標をもとに C の方程式を書き直すところから始めました。

2

問題のページへ

(1)　領域$1 \leqq x \leqq 3$，$1 \leqq y \leqq 5$にある 15 個の格子点から，相異なる 3 点を選ぶ${}_{15}\mathrm{C}_3 = 455$通りが同様に確からしいとする。



まず，選んだ 3 点が同一直線上にある場合を調べると，

(i)　直線$x = k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$上のとき　${}_5\mathrm{C}_3 \times 3 = 30$通り

(ii)　直線$y = k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$上のとき　${}_3\mathrm{C}_3 \times 5 = 5$通り

(iii) 傾き± 1の直線上のとき

傾き 1 の直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+1)$，$(3,\ k+2)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+2 \leqq 5$から$k = 1,\ 2,\ 3$である。このとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 3 = 3$通りの場合があり，傾き$-1$の直線上も同様に 3 通りより，合わせて$3+3 = 6$通りとなる。

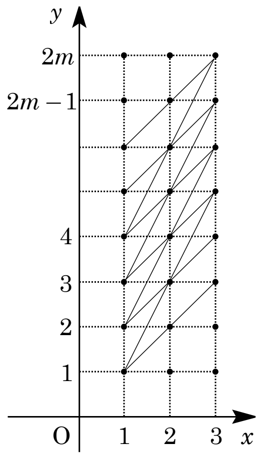
(iv) 傾き± 2の直線上のとき

傾き 2 の直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+2)$，$(3,\ k+4)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+4 \leqq 5$から$k = 1$のみである。このとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 1 = 1$通りの場合があり，傾き$-2$の直線上も同様に 1 通りより，合わせて$1+1 = 2$通りとなる。

(i)〜(iv)より，選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率p_5は，

$$p_5 = 1 - \frac{30+5+6+2}{455} = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$

(2)　m が 2 以上の整数のとき，領域$1 \leqq x \leqq 3$，$1 \leqq y \leqq 2m$にある$3 \times 2m = 6m$個の格子点から，相異なる 3 点を選ぶ${}_{6m}\mathrm{C}_3 = m(6m-1)(6m-2)$通りが同様に確からしいとする。



まず，選んだ 3 点が同一直線上にある場合を調べると，

(i)　直線$x = k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$上のとき

$${}_{2m}\mathrm{C}_3 \times 3 = m(2m-1)(2m-2)\text{ 通り}$$

(ii)　直線$y = k$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$上のとき

$${}_3\mathrm{C}_3 \times 2m = 2m\text{ 通り}$$

(iii) 傾き$\pm l$ (lは自然数) の直線上のとき

傾きlの直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+l)$，$(3,\ k+2l)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+2l \leqq 2m$から$1 \leqq k \leqq 2m-2l$となる。

すると，l のとりうる値は$1 \leqq 2m-2l$から$l = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$であり，たとえば$l = 1$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times (2m-2) = 2m-2$通り，$l = 2$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times (2m-4) = 2m-4$通り，…，$l = m-1$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 2 = 2$通りの場合がある。

傾き$-l$の直線上も同様なので，合わせて，

$$\{(2m-2)+(2m-4)+\cdots+2\} \times 2 = 4\{(m-1)+(m-2)+\cdots+1\}$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(m-1)m = 2m(m-1)\ \text{通り}$$

(i)〜(iii)より，選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率 p_{2m} は，

$$p_{2m}=1-\frac{m(2m-1)(2m-2)+2m+2m(m-1)}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$=1-\frac{2m(2m^2-3m+1+1+m-1)}{m(6m-1)(6m-2)}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$

［コメント］

格子点を題材にした確率問題です。(1)で具体例を計算し，(2)では(1)のプロセスを参考にして一般化するという流れになっています。

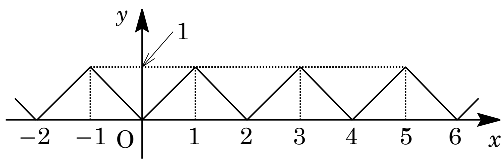
$\boxed{3}$

問題のページへ

$0<a<1$ のとき，$f(x)=\dfrac{a}{8}(x-1)^2+\dfrac{2}{a}-3$ とする。また，整数 n に対して，

$$g(x)=x-2n \quad (2n\leqq x<2n+1)$$
$$g(x)=-x+2n+2 \quad (2n+1\leqq x<2n+2)$$

$g(x+2)=g(x)$ から，$g(x)$ は周期 2 の周期関数であり，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。



(1)　$x\geqq 4$ において，$f(x)>g(x)$ を示すために，区間を分割して，

(i)　$4\leqq x<5$ のとき　$g(x)=x-4$ となり，$p(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$p(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3-(x-4)=\frac{a}{8}(x-1)^2-x+\frac{2}{a}+1$$
$$p'(x)=\frac{a}{4}(x-1)-1=\frac{a}{4}\left(x-1-\frac{4}{a}\right)$$

x	$\cdots$	$1+\dfrac{4}{a}$	$\cdots$
$p'(x)$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$0<a<1$ から $1+\dfrac{4}{a}>1+4=5$ となり，$4\leqq x<5$ において，$p(x)$ は単調に減少するので，

$$p(x)>p(5)=2a-5+\frac{2}{a}+1=2a+\frac{2}{a}-4=\frac{2(a-1)^2}{a}>0$$

したがって，$f(x)>g(x)$ が成り立つ。

(ii)　$x\geqq 5$ のとき　$g(x)\leqq 1$ より，$q(x)=f(x)-1$ とおくと，

$$q(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3-1=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-4$$

すると，$q(x)\geqq q(5)=2a+\dfrac{2}{a}-4=p(5)>0$ となり，$q(x)>0$ である。

したがって，$f(x)>1\geqq g(x)$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x\geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ が成り立つ。

(2)　まず，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ から $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{a}<2$ となり，$0<\dfrac{2}{a}-3<1$ なので，$y=f(x)$ のグラフの頂点は，x 座標が 1，y 座標が 0 より大で 1 より小である。

さて，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数については，$x\geqq 4$ のとき，(1)から $f(x)>g(x)$ なので 0 個である。

次に，$2\leqq x\leqq 3$ のときを調べると，$2\leqq x<3$ では $g(x)=x-2$，$g(3)=1$ であるので，$g(x)=x-2$ $(2\leqq x\leqq 3)$ として，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$h(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3-(x-2)=\frac{a}{8}(x-1)^2-x+\frac{2}{a}-1$$
$$h'(x)=\frac{a}{4}(x-1)-1=\frac{a}{4}\left(x-1-\frac{4}{a}\right)$$

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ から $1+\dfrac{4}{a}>1+6=7$ となり，(1)(i)と同様に考えると，$2\leqq x\leqq 3$ においては $h(x)$ は単調に減少する。

ここで，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ から $h(2)=\dfrac{a}{8}-2+\dfrac{2}{a}-1=\dfrac{a}{8}+\left(\dfrac{2}{a}-3\right)>0$ となり，

$$h(3)=\frac{a}{2}-3+\frac{2}{a}-1=\frac{a^2-8a+4}{2a}=\frac{\{a-(4-2\sqrt{3})\}\{a-(4+2\sqrt{3})\}}{2a}$$

すると，$2\leqq x\leqq 3$ における $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数については，$\dfrac{1}{2}<4-2\sqrt{3}<\dfrac{2}{3}$ から，

・$\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{3}$ のとき　$h(3)>0$ より 0 個

・$a=4-2\sqrt{3}$ のとき　$h(3)=0$ より $x=3$ に 1 個

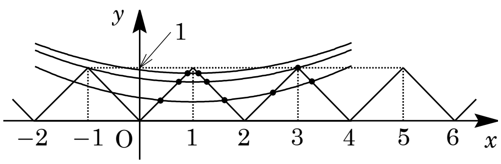
・$4-2\sqrt{3}<a<\dfrac{2}{3}$ のとき　$h(3)<0$ より $2<x<3$ に 1 個

したがって，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは，ともに直線 $x=1$ について対称であることを考え合わせると，$x\geqq 0$ における共有点の個数については，

$\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{3}$ のとき 2 個

$a=4-2\sqrt{3}$ のとき 3 個

$4-2\sqrt{3}<a<\dfrac{2}{3}$ のとき 4 個



［コメント］

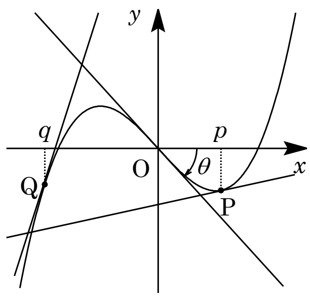
2 次関数のグラフと周期関数のグラフの共有点についての問題で，図を参照しながら注意深い計算を行うことが要求されます。なお，平方完成は計算が面倒そうでしたので，増減は微分法を用いて調べています。

$\boxed{4}$　　問題のページへ

(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta}$

(2)　曲線 $C: y=x^3-kx$ について, C 上の異なる 3 点 O, P, Q におけるどの接線も平行でなく，しかも交わる 2 接線のなす角がすべて $\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。このとき，まず $k\leqq 0$ ならば $y'=3x^2-k\geqq 0$ なので，どの接線の傾きも 0 以上になり，2 接線のなす角がすべて $\dfrac{\pi}{3}$ という条件に反する。

以下，$k>0$ として，点 P, Q の x 座標をそれぞれ $x=p,\ q$ とし，さらに 3 点 O, P, Q における接線の傾きを，それぞれ m_o，m_p，m_q とおくと，



$$m_o=-k,\ m_p=3p^2-k,\ m_q=3q^2-k \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，$m_o\neq m_p$，$m_o\neq m_q$，$m_p\neq m_q$ から，

$$-k\neq 3p^2-k,\ -k\neq 3q^2-k,\ 3p^2-k\neq 3q^2-k$$

まとめると，$p\neq 0$，$q\neq 0$，$q\neq \pm p$ となり，このもとで, x 軸の正の部分から点 O における接線へのなす角を θ とすると，

$$m_o=\tan\theta,\ m_p=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ m_q=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cdots\cdots\cdots ②$$

①②から，$\tan\theta=-k<0 \cdots\cdots ③$であり，これより $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ となり，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=3p^2-k\cdots\cdots\cdots ④,\ \tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3q^2-k\cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，$-\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}$ であるが，$-\dfrac{5}{6}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<-\dfrac{\pi}{3}$ については，$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ のときは不適となり，③から $k\neq-\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

以上より，$k>0$ かつ $k\neq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のもとで,

④より，$\dfrac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta}=3p^2-k$ となり，③を代入すると $\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}=3p^2-k$ から，

$$p^2=\frac{1}{3}\left(\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}+k\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}k^2}{3(1+\sqrt{3}k)}=\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より，$\dfrac{\tan\theta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\theta}=3q^2-k$ となり，③を代入すると $\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}=3q^2-k$ から，

$$q^2=\frac{1}{3}\left(\frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}+k\right)=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}k^2}{3(1-\sqrt{3}k)}=\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦を満たす $p, q\,(p\neq 0,\ q\neq 0,\ q\neq\pm p)$ が存在する条件は,

$$\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}>0,\ \frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}>0,\ \frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}\neq\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}$$

すると，$k>0$ かつ $k\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$ から，$3k-\sqrt{3}>0$ となり，$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(3)　⑥⑦より，$\alpha=\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$，$\beta=\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}$ とおくと，$p=\pm\alpha$，$q=\pm\beta$ となり，

$$-\beta<-\alpha<0<\alpha<\beta$$

ここで，点 O における接線の方程式は $y=-kx$，点 P における接線の方程式は

$$y-(p^3-kp)=(3p^2-k)(x-p),\ y=(3p^2-k)x-2p^3$$

2 接線の交点は，$-kx=(3p^2-k)x-2p^3$ より $x=\frac{2}{3}p$ となり，$\left(\frac{2}{3}p,\ -\frac{2}{3}pk\right)$

同様に，点 O における接線と点 Q における接線の交点は，$\left(\frac{2}{3}q,\ -\frac{2}{3}qk\right)$

すると，交点間の距離は，$\sqrt{\left(\frac{2}{3}p-\frac{2}{3}q\right)^2+\left(-\frac{2}{3}pk+\frac{2}{3}qk\right)^2}=\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}$

これより，3 本の接線で囲まれる正三角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2(p-q)^2(1+k^2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(p-q)^2$$

すると，$(p-q)^2$ の最大値は $(\alpha+\beta)^2$，最小値は $(-\alpha+\beta)^2$ となり，S の最大値を M, 最小値を m とおくと，

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(\alpha+\beta)^2,\ m=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(-\alpha+\beta)^2$$

$M=4m$ から，$(\alpha+\beta)^2=4(-\alpha+\beta)^2$ となり，$3\alpha^2-10\alpha\beta+3\beta^2=0$

$$(3\alpha-\beta)(\alpha-3\beta)=0$$

$0<\alpha<\beta$ より，$\beta=3\alpha$ となり，$\sqrt{\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}=3\sqrt{\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$ から，

$$3k+\sqrt{3}=9(3k-\sqrt{3}),\ 24k-10\sqrt{3}=0$$

したがって，$k=\frac{5}{12}\sqrt{3}$ となり，この値は $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$ を満たしている。

［コメント］

3 次曲線の接線を題材にした問題で，量的にかなり多めです。(1)から予測できるように，要点は三角関数の加法定理を用いて，2 直線のなす角について調べる点です。