$\boxed{1}$

解答解説のページへ

座標空間内の点 $A(0,\ -1,\ 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる。

(ii)　$\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii)　$\angle\mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

次の関数 $f(x)$ を考える。$f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2)　(1)で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標平面上を次の規則(i), (ii)に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i)　最初に, P は点$(2,\ 1)$にいる。

(ii)　ある時刻で P が点$(a,\ b)$にいるとき, その 1 秒後には P は

・確率$\dfrac{1}{3}$で x 軸に関して$(a,\ b)$と対称な点

・確率$\dfrac{1}{3}$で y 軸に関して$(a,\ b)$と対称な点

・確率$\dfrac{1}{6}$で直線 $y=x$ に関して$(a,\ b)$と対称な点

・確率$\dfrac{1}{6}$で直線 $y=-x$ に関して$(a,\ b)$と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし, (1)については, 結論のみを書けばよい。

(1)　P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点$(2,\ 1)$にいる確率と, 最初から n 秒後に P が点$(-2,\ -1)$にいる確率は等しいことを示せ。

(3)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点$(2,\ 1)$にいる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく。$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線をもち，x 軸上に中心をもつ円を C_t とする。

(1)　円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2)　実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

座標空間内に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2) $a,\ b$ を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

1

問題のページへ

原点Oと異なる xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ と，点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$ に対して，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\angle\mathrm{AOP}\geqq\frac{2}{3}\pi$ から $\cos\angle\mathrm{AOP}\leqq-\frac{1}{2}$ となるので，$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}\leqq-\frac{1}{2}$

$$2y\geqq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

すると，$y\geqq0$ において $4y^2\geqq2(x^2+y^2)$ となり，$y^2-x^2\geqq0$ から，

$$(y+x)(y-x)\geqq0\quad(y\geqq0)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y+1,\ -1)$ から，

$$\cos\angle\mathrm{OAP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

$\angle\mathrm{OAP}\leqq\frac{\pi}{6}$ から $\cos\angle\mathrm{OAP}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるので，$\frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

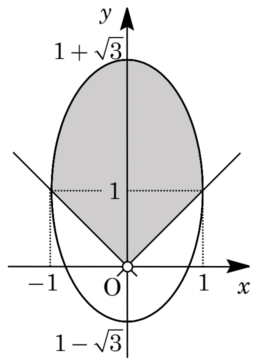
$$2(y+2)\geqq\sqrt{6}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}$$

すると，$y+2\geqq0$ において，$4(y+2)^2\geqq6\{x^2+(y+1)^2+1\}$ となり，

$$2(y^2+4y+4)\geqq3x^2+3(y^2+2y+1)+3$$

$3x^2+y^2-2y-2\leqq0$ から，$3x^2+(y-1)^2\leqq3$ となり，

$$x^2+\frac{(y-1)^2}{3}\leqq1\quad(y\geqq-2)\cdots\cdots\cdots②$$



①②から，P がとりうる xy 平面上の範囲は，右図の網点部である。ただし，原点以外の境界は含む。

［解 説］

空間ベクトルと領域についての基本的な問題です。計算量は少なめです。

2

問題のページへ

(1) $f(x)=\int_0^1\dfrac{|t-x|}{1+t^2}dt\ (0\leqq x\leqq 1)$ に対し，$f(x)=-\int_0^x\dfrac{t-x}{1+t^2}dt+\int_x^1\dfrac{t-x}{1+t^2}dt$

$$f(x)=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt+x\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\int_x^1\frac{t}{1+t^2}dt-x\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}\cdots\cdots\cdots①$$

$$f'(x)=-\frac{x}{1+x^2}+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}-\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}+x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}\cdots\cdots\cdots②$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<\tan\alpha<1$ であり，$f'(\tan\alpha)=\int_0^{\tan\alpha}\dfrac{dt}{1+t^2}-\int_{\tan\alpha}^1\dfrac{dt}{1+t^2}$

ここで，$t=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ となり，

$$f'(\tan\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\alpha}d\theta-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\alpha-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{\pi}{4}$$

すると，$f'(\tan\alpha)=0$ から $2\alpha-\dfrac{\pi}{4}=0$ となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ である。

(2) 半角公式から，$\tan^2\alpha=\tan^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ より，$\tan\alpha=\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ である。

(3) ②から，$f''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{2}{1+x^2}>0$ となるので，$f'(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加する。

そして，(2)から，$f'(\sqrt{2}-1)=0$ であるので，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。このとき，①から，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$$f(0)=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\log(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

$$f(1)=-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt+\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{2}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

すると，$0.69<\log 2<0.7$ から $f(0)-f(1)=\log 2-\dfrac{\pi}{4}<0$ となり，$f(0)<f(1)$

したがって，最大値は $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$ である。

また，最小値は $f(\sqrt{2}-1)$ であり，①から，

$$f(\sqrt{2}-1)=-\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{t}{1+t^2}dt+(\sqrt{2}-1)\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{dt}{1+t^2}+\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{t}{1+t^2}dt$$
$$-(\sqrt{2}-1)\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_0^{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(4-2\sqrt{2})$

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log(4-2\sqrt{2})$$

$$\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{dt}{1+t^2}-\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{8}}d\theta-\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{8}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)=0$$

まとめると，$f(\sqrt{2}-1)=-\dfrac{1}{2}\log(4-2\sqrt{2})+\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{1}{2}\log(4-2\sqrt{2})$ となり，

$$f(\sqrt{2}-1)=\log\sqrt{2}-\log(4-2\sqrt{2})=\log\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\log\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

［解　説］

微分と積分の関係を利用した定積分の計算問題です。(1)が(3)の誘導になっています。ただ，最小値の計算はやや面倒です。

3

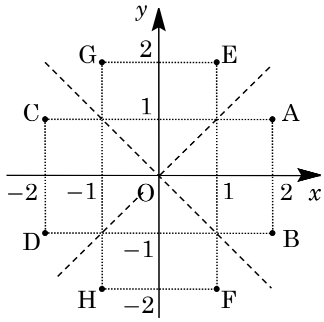
問題のページへ

(1) 点$(a,\ b)$とx軸, y軸, 直線$y=x$, 直線$y=-x$に関して対称な点は, それぞれ$(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$, $(b,\ a)$, $(-b,\ -a)$である。

これより, 最初, 点$(2,\ 1)$にいる点Pが, 与えられた規則によってとりうる点は, 次の8点である。

A$(2,\ 1)$, B$(2,\ -1)$, C$(-2,\ 1)$, D$(-2,\ -1)$

E$(1,\ 2)$, F$(1,\ -2)$, G$(-1,\ 2)$, H$(-1,\ -2)$



(2) 最初からn秒後にPがA, B, C, D, E, F, G, Hにいる確率を, それぞれa_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_nとすると,

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{6}e_n+\frac{1}{6}h_n,\ d_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{6}h_n+\frac{1}{6}e_n$$

これより, $a_{n+1}=d_{n+1}$となり, $n\geqq 2$で$a_n=d_n$である。

さらに, $a_1=d_1=0$から, $a_n=d_n\ (n\geqq 1)$となる。

(3) (2)と同様にすると, $a_n=d_n$, $b_n=c_n$, $e_n=h_n$, $f_n=g_n$となり,

$$a_n+b_n+e_n+f_n=\frac{1}{2}$$

ただし, $a_1=0$, $b_1=\frac{1}{3}$, $e_1=\frac{1}{6}$, $f_1=0$である。このとき,

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}e_n\cdots\cdots\cdots①,\ b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}f_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$e_{n+1}=\frac{2}{3}f_n+\frac{1}{3}a_n\cdots\cdots\cdots③,\ f_{n+1}=\frac{2}{3}e_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots④$$

①＋④から, $a_{n+1}+f_{n+1}=b_n+e_n=\frac{1}{2}-(a_n+f_n)$となり,

$$a_{n+1}+f_{n+1}-\frac{1}{4}=-\left(a_n+f_n-\frac{1}{4}\right)$$

すると, $a_n+f_n-\frac{1}{4}=\left(a_1+f_1-\frac{1}{4}\right)(-1)^{n-1}=-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}$となり,

$$a_n+f_n=\frac{1}{4}\{1-(-1)^{n-1}\}=\frac{1}{4}\{1+(-1)^n\}\cdots\cdots\cdots⑤$$

①－④から$a_{n+1}-f_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-e_n)$, ②－③から$b_{n+1}-e_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-f_n)$となり,

$$a_{n+2}-f_{n+2}=\frac{1}{3}(b_{n+1}-e_{n+1})=\frac{1}{9}(a_n-f_n)\cdots\cdots\cdots⑥$$

なお, $a_2=\frac{2}{3}b_1+\frac{1}{3}e_1=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$, $f_2=\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}b_1=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$である。

⑥から, $(a_{n+2}-f_{n+2})-\frac{1}{3}(a_{n+1}-f_{n+1})=-\frac{1}{3}\left\{(a_{n+1}-f_{n+1})-\frac{1}{3}(a_n-f_n)\right\}$となり,

$$(a_{n+1}-f_{n+1})-\frac{1}{3}(a_n-f_n)=\left\{(a_2-f_2)-\frac{1}{3}(a_1-f_1)\right\}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

⑥から, $(a_{n+2}-f_{n+2})+\frac{1}{3}(a_{n+1}-f_{n+1})=\frac{1}{3}\left\{(a_{n+1}-f_{n+1})+\frac{1}{3}(a_n-f_n)\right\}$となり,

$$(a_{n+1}-f_{n+1})+\frac{1}{3}(a_n-f_n)=\left\{(a_2-f_2)+\frac{1}{3}(a_1-f_1)\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$\dfrac{2}{3}(a_n-f_n)=\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{18}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ より，

$$a_n-f_n=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑦から，$2a_n=\dfrac{1}{4}\left\{1+(-1)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ となり，

$$a_n=\frac{1}{8}\left\{1+(-1)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

以上より，最初から n 秒後にPが点$(2,\ 1)$にいる確率 a_n は，

$$a_n=\frac{1}{8}\left\{1+1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\quad（n \text{ が偶数}）$$

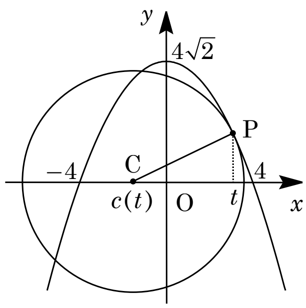
$$a_n=\frac{1}{8}\left\{1-1+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=0\quad（n \text{ が奇数}）$$

［解　説］

確率と漸化式の問題です。(3)の①～④の漸化式については，いろいろな解法が考えられます。なお，⑤式からは n を偶奇に分けて処理しても構いません。

4

問題のページへ



(1)　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x^2-16)$ に対して，放物線 $y=f(x)$ と中心 $\mathrm{C}(c(t),\ 0)$ で半径 $r(t)$ の円 C_t が，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(0<t<4)$ で共通の接線をもつ。

さて，$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ より，点 P における放物線の接線の方向ベクトル $\vec{u}$ は $\vec{u}=\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$ と表せる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(t-c(t),\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)$ であり，点 P において放物線と円 C_t が共通接線をもつことより，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ となり，

$$\{t-c(t)\}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)=0,\ t-c(t)+\frac{1}{4}t^3-4t=0$$

これより，$c(t)=\dfrac{1}{4}t^3-3t$ となり，

$$\{r(t)\}^2=\mathrm{CP}^2=\{t-c(t)\}^2+\{f(t)\}^2=\left(-\frac{1}{4}t^3+4t\right)^2+\frac{1}{8}(t^2-16)^2$$

$$=\frac{t^2}{16}(t^2-16)^2+\frac{1}{8}(t^2-16)^2=\frac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)$$

(2)　(1)より，円 $C_t:\left(x-\dfrac{1}{4}t^3+3t\right)^2+y^2=\dfrac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)$ となり，C_t が点 $(3,\ a)$ を通ることより，

$$\left(3-\frac{1}{4}t^3+3t\right)^2+a^2=\frac{1}{16}(t+4)^2(t-4)^2(t^2+2)$$

$$a^2=\frac{1}{16}(t-16)^2(t^2+2)-\frac{1}{16}(t^3-12t-12)^2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$g(t)=(t^2-16)^2(t^2+2)-(t^3-12t-12)^2$ とおくと，

$$g'(t)=4t(t^2-16)(t^2+2)+2t(t^2-16)^2-2(t^3-12t-12)(3t^2-12)$$

$$=2t(t^2-16)\{2(t^2+2)+(t^2-16)\}-6(t^3-12t-12)(t^2-4)$$

$$=6t(t^2-16)(t^2-4)-6(t^3-12t-12)(t^2-4)$$

$$=6(t^2-4)\{(t^3-16t)-(t^3-12t-12)\}=-24(t+2)(t-2)(t-3)$$

すると，$0<t<4$ における $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	368	↘	80	↗	98	↘	-16

さて，t の方程式①は，

$$16a^2=g(t)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(3)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(9-16)=\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ から，実数 a は $0<a<\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ の値をとり，

$$0<a^2<\frac{49}{8},\ 0<16a^2<98\cdots\cdots\cdots③$$

したがって，$0<t<4$ の範囲にある②を満たす実数 t の個数は，③から，

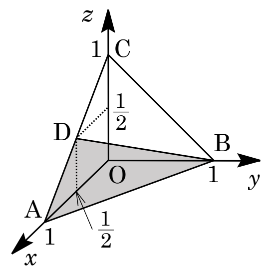
$0<16a^2<80\ (0<a<\sqrt{5})$ のとき　t の個数は 1 個
$16a^2=80\ (a=\sqrt{5})$ のとき　t の個数は 2 個
$80<16a^2<98\ \left(\sqrt{5}<a<\frac{7}{4}\sqrt{2}\right)$ のとき　t の個数は 3 個

［解 説］

共通接線と微分法の方程式への応用を組み合わせた問題です。基本的な内容ですが，計算はかなり面倒です。

5

問題のページへ



3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) と，線分 AC の中点 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ に対して，△ABD を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を考える。

まず，△ABD を含む平面の方程式は，$x+y+z=1$ であり，

(a)　辺 AB を表す方程式は，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$x+y=1,\ z=0\cdots\cdots\cdots①$$

(b)　辺 AD を表す方程式は，$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において，$x+z=1$，$y=0\cdots\cdots\cdots②$

(c)　辺 BD を表す方程式は，$0\leqq x\leqq \frac{1}{2}$ において，$x=z$，$2x+y=1\cdots\cdots\cdots③$

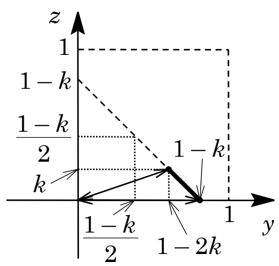
さて，△ABD を平面 $x=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口は線分になり，これを x 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ型の図形の面積を $S(k)$ とおく。

(i)　$0\leqq k\leqq \frac{1}{2}$ のとき

平面 $x=k$ と辺 AB との交点は，①から $(k,\ 1-k,\ 0)$，辺 BD との交点は，③から $(k,\ 1-2k,\ k)$ となり，△ABD の切り口はこの 2 点を両端とする線分である。

ここで，この線分を含む直線 $(x=k,\ y+z=1-k)$ に点 $(k,\ 0,\ 0)$ から下ろした垂線の足 $\left(k,\ \frac{1-k}{2},\ \frac{1-k}{2}\right)$ が，線分に含まれるかどうかで，さらに場合分けをする。

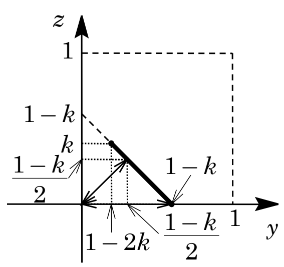
(i-i)　$\frac{1-k}{2}\leqq 1-2k\ \left(0\leqq k\leqq\frac{1}{3}\right)$ のとき



このとき，垂線の足は線分に含まれないので，ドーナツ型の外径は $1-k$，内径は $\sqrt{(1-2k)^2+k^2}=\sqrt{5k^2-4k+1}$ となり，その面積は，

$$\begin{aligned}S(k)&=\pi\{(1-k)^2-(5k^2-4k+1)\}\\&=\pi(-4k^2+2k)\end{aligned}$$

(i-ii)　$\frac{1-k}{2}\geqq 1-2k\ \left(\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}\right)$ のとき

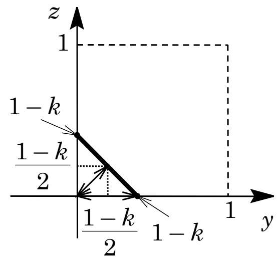


このとき，垂線の足は線分に含まれるので，ドーナツ型の外径は $1-k$，内径は $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$ となり，その面積は，

$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

(ii)　$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ のとき

平面 $x=k$ と辺 AB との交点は，①から $(k,\ 1-k,\ 0)$，辺 AD との交点は，②から $(k,\ 0,\ 1-k)$ となり，△ABD の切り口はこの 2 点を両端とする線分である。



このとき，ドーナツ型の外径は$1-k$，内径は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$となり，その面積は，

$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

(i)(ii)より，$S(k)=\pi(-4k^2+2k)\quad\left(0\leqq k\leqq\dfrac{1}{3}\right)$

$$S(k)=\frac{\pi}{2}(1-k)^2\quad\left(\frac{1}{3}\leqq k\leqq 1\right)$$

以上より，求める立体の体積Vは，

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{3}}(-4k^2+2k)\,dk+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-k)^2\,dk$$

$$=\pi\left[-\frac{4}{3}k^3+k^2\right]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{\pi}{6}\left[(1-k)^3\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{5}{81}\pi+\frac{4}{81}\pi=\frac{\pi}{9}$$

［解　説］

回転体の体積の問題で，頻出タイプです。単純な構図で，しかも計算は穏やかであるにもかかわらず，それなりに時間を費やします。演習しておくべき１題でしょう。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+10x^2+20x=x(x^2+10x+20)$ に対して，$f(n)=n(n^2+10n+20)$ が素数となる整数 n は，p, q, r, s を素数として，

(i)　$(n,\ n^2+10n+20)=(1,\ p)$ で $f(n)=p$ のとき
$p=1^2+10\cdot1+20=31$ から，$f(1)=31$ は素数である。

(ii)　$(n,\ n^2+10n+20)=(-1,\ -q)$ で $f(n)=q$ のとき
$q=-\{(-1)^2+10\cdot(-1)+20\}=-11$ から，$f(-1)=-11$ は素数でない。

(iii)　$(n,\ n^2+10n+20)=(r,\ 1)$ で $f(n)=r$ のとき
$r^2+10r+20=1$ から $r^2+10r+19=0$ となり，素数 r は存在しない。

(iv)　$(n,\ n^2+10n+20)=(-s,\ -1)$ で $f(n)=s$ のとき
$(-s)^2+10(-s)+20=-1$ から $s^2-10s+21=0$ となり，$(s-3)(s-7)=0$
すると，$s=3,\ 7$ はともに素数であり，$f(-3)=3$，$f(-7)=7$ となる。

(i)〜(iv)より，$f(n)$ が素数となる整数 n は，$n=1,\ -3,\ -7$ である。

(2)　$a,\ b$ を整数の定数とするとき，$g(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$ に対して，$g(n)=n(n^2+an+b)$ が素数となる整数 n は，p, q, r, s を素数として，

(i)　$(n,\ n^2+an+b)=(1,\ p)$ で $g(n)=p$ のとき
$1^2+a\cdot1+b=p$ から，$p=a+b+1$ ………①

(ii)　$(n,\ n^2+an+b)=(-1,\ -q)$ で $g(n)=q$ のとき
$(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-q$ から，$q=-(1-a+b)=a-b-1$ ………②

(iii)　$(n,\ n^2+an+b)=(r,\ 1)$ で $g(n)=r$ のとき
$r^2+ar+b=1$ から，$r^2+ar+b-1=0$ ………③

(iv)　$(n,\ n^2+an+b)=(-s,\ -1)$ で $g(n)=s$ のとき
$(-s)^2+a(-s)+b=-1$ から，$s^2-as+b+1=0$ ………④

(i)〜(iv)より，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は，高々 $1+1+2+2=6$ 個である。

まず，(iii)と(iv)が同時に成り立つ場合について考えると，③－④から，
$$r^2-s^2+a(r+s)-2=0,\ (r+s)(r-s+a)=2\ \cdots\cdots\cdots⑤$$
$r+s\geqq4$ から⑤は成立しないので，(iii)と(iv)が同時に成り立つ場合はない。

これより，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は高々4 個となり，以下，(i)(ii)(iii)が同時に成り立つ場合，(i)(ii)(iv)が同時に成り立つ場合について考える。

(a)　(i)(ii)(iii)が同時に成り立つ場合
$$p=a+b+1\ \cdots\cdots\cdots①,\ q=a-b-1\ \cdots\cdots\cdots②$$
そして，③を満たす異なる素数 r を $r=r_1,\ r_2\ (2\leqq r_1<r_2)$ とおくと，
$$r_1+r_2=-a\ \cdots\cdots\cdots③',\ r_1r_2=b-1\ \cdots\cdots\cdots③''$$

②③′③″から，

$$q=-r_1-r_2-r_1r_2-1-1=-r_1r_2-r_1-r_2-2<0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥は成立しないので，(i)(ii)(iii)が同時に成り立つ場合はなく，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数が 4 個のときはない。

(b)　(i)(ii)(iv)が同時に成り立つ場合

$$p=a+b+1 \cdots\cdots\cdots ①,\quad q=a-b-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

そして，④を満たす異なる素数 s を $s=s_1$，s_2 $(2 \leqq s_1 < s_2)$ とおくと，

$$s_1+s_2=a \cdots\cdots\cdots ④',\quad s_1s_2=b+1 \cdots\cdots\cdots ④''$$

②④′④″から，

$$q=s_1+s_2-s_1s_2+1-1=-s_1s_2+s_1+s_2=1-(s_1-1)(s_2-1)<0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦は成立しないので，(i)(ii)(iv)が同時に成り立つ場合はなく，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数が 4 個のときはない。

(a)(b)より，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 個以下である。

［解　説］

素数を題材にした論証問題です。(2)の整数 n の個数については，(1)の具体例を参考にして，高々6 個→高々4 個→高々3 個という順序で示しています。