1

解答解説のページへ

座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線をもっている。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

(1) a, b, c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

(1)　$5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$ をとる。x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ が，次の条件(i), (ii)をともに満たすとする。

(i)　$0<p<1$ かつ $p<q$

(ii)　線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$

(1)　q を p を用いて表せ。

(2)　$q=\dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAP}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{PMQ}$ の面積を T とする。$S>T$ となる p の範囲を求めよ。

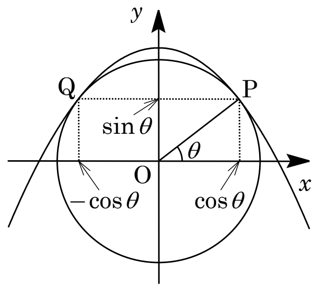
4

解答解説のページへ

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ ……①が，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0°<\theta<90°)$ を通ることより，

$$a\cos^2\theta+b\cos\theta+c=\sin\theta \text{………②}$$

$$a\cos^2\theta-b\cos\theta+c=\sin\theta \text{………③}$$

②③から，$b=0$ ……④，$c=\sin\theta-a\cos^2\theta$ ……⑤

すると，①から $C: y=ax^2+c$ となり，$y'=2ax$

これから，点 P における C の接線の方向ベクトル $\vec{u}$ は $\vec{u}=(1,\ 2a\cos\theta)$ と表せる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であり，点 P において C と円 $x^2+y^2=1$ が共通接線をもつことより，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ となり，

$$\cos\theta+2a\sin\theta\cos\theta=0,\ 1+2a\sin\theta=0$$

$s=\sin\theta$ とおくと，$a=-\dfrac{1}{2\sin\theta}=-\dfrac{1}{2s}$ ………⑥

なお，C と円 $x^2+y^2=1$ はともに y 軸に関して対称であるので，点 P において共通接線をもつと，点 Q においても共通接線をもつことになる。

よって，④⑤⑥から，$a=-\dfrac{1}{2s}$，$b=0$，$c=s-\left(-\dfrac{1}{2s}\right)(1-s^2)=\dfrac{s}{2}+\dfrac{1}{2s}$

(2)　(1)から，$C: y=-\dfrac{1}{2s}x^2+\dfrac{s}{2}+\dfrac{1}{2s}=-\dfrac{1}{2s}(x^2-s^2-1)$ となり，C と x 軸との交点は，$x=\pm\sqrt{s^2+1}$ である。すると，C と x 軸で囲まれた図形の面積 A は,

$$A=-\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}}\left(x+\sqrt{s^2+1}\right)\left(x-\sqrt{s^2+1}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2s}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{s^2+1}\right)^3=\frac{2}{3s}\left(\sqrt{s^2+1}\right)^3$$

(3)　$A^2-3=\dfrac{4}{9s^2}(s^2+1)^3-3=\dfrac{4(s^6+3s^4+3s^2+1)-27s^2}{9s^2}=\dfrac{4s^6+12s^4-15s^2+4}{9s^2}$

ここで，$t=s^2$ とおくと，$0<s<1$ から $0<t<1$ である。

さらに，$f(t)=4t^3+12t^2-15t+4$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2+24t-15$$

$$=3(2t-1)(2t+5)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	↘	0	↗	5

$0<t<1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)\geqq 0$ である。

すると，$A^2-3=\dfrac{f(t)}{9t}\geqq 0$ となり，$A\geqq\sqrt{3}$ である。なお，等号は $t=\dfrac{1}{2}$，すなわち $s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成立する。

［解 説］

微積分の総合問題です。頻出の題材で，しかも難しめの計算もありません。

2

問題のページへ

(1)　$5^n > 10^{19}$ ……①に対して，$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$ から $n\log_{10}\dfrac{10}{2} > 19$ となり，

$$n(1-\log_{10} 2) > 19,\ n > \frac{19}{1-\log_{10} 2} \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ から，$0.69 < 1-\log_{10} 2 < 0.7$ となり，

$$27.1 < \frac{19}{1-\log_{10} 2} < 27.6$$

すると，②すなわち①を満たす最小の自然数 n は $n = 28$ である。

(2)　(1)から $5^{28} > 10^{19}$ なので，$5^m + 4^m > 10^{19}$ ……③は，$m = 28$ で成立している。

そこで，$m = 27$ のとき③が満たされてるかどうか，すなわち $5^{27} + 4^{27} > 10^{19}$ が成り立っているかどうかを調べる。

さて，$5^{27} + 4^{27} = 5^{27}\left\{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27}\right\}$ から，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27} < \left(\dfrac{4}{5}\right)^{7} < \dfrac{1}{4}$ に注目すると，

$$5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\} < 5^{27}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5^{28}}{4},\ \log_{10} 5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\} < \log_{10}\frac{5^{28}}{4}$$

すると，$\log_{10}\dfrac{5^{28}}{4} = 28(1-\log_{10} 2) - 2\log_{10} 2 = 28 - 30\log_{10} 2$ から，

$$18.7 < 28 - 30\log_{10} 2 < 19$$

よって，$\log_{10} 5^{27}\left\{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27}\right\} < 19$，すなわち $5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$ から，$m = 27$ では③は成り立っていない。

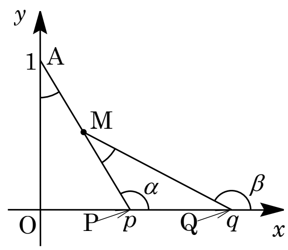
以上より，数列 $\{5^m + 4^m\}$ は単調に増加するので，③を満たす最小の自然数 m は $m = 28$ である。

［解 説］

対数計算と整数の融合問題です。(2)の考え方は，m が大きくなると 5^m は 4^m よりかなり大，言い換えると $\left(\dfrac{4}{5}\right)^m$ は 0 に近づいていくというイメージと，$\log_{10} 2$ と相性のよい $\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$ を結び付けたものです。

3

問題のページへ



(1)　$0<p<1$，$p<q$ のとき，A$(0,\ 1)$，P$(p,\ 0)$，Q$(q,\ 0)$ に対し，線分 AP の中点 M は M$\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。

さて，$\tan\angle\mathrm{OAP}=\dfrac{p}{1}=p$ であり，直線 AP, MQ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とおくと，

$$\tan\alpha=-\frac{1}{p},\ \tan\beta=\frac{-\frac{1}{2}}{q-\frac{p}{2}}=-\frac{1}{2q-p}$$

すると，$\angle\mathrm{PMQ}=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\angle\mathrm{PMQ}=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{2q-p}\cdot\frac{1}{p}}=\frac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$$

すると，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$ から，$p=\dfrac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$ となり，$0<p<1$ から，

$$p^2(2q-p)+p=2q-2p,\ (2p^2-2)q=p^3-3p,\ q=\frac{p^3-3p}{2p^2-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$q=\dfrac{1}{3}$ のとき，$(*)$から $\dfrac{1}{3}=\dfrac{p^3-3p}{2p^2-2}$ となり，$2p^2-2=3p^3-9p$ より，

$$3p^3-2p^2-9p+2=0,\ (p-2)(3p^2+4p-1)=0$$

$0<p<\dfrac{1}{3}$ より，$p=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ となる。

(3)　$\triangle$OAP の面積を S，$\triangle$PMQ の面積を T とすると，

$$S=\frac{1}{2}p\cdot1=\frac{p}{2},\ T=\frac{1}{2}(q-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{q-p}{4}$$

$S>T$ のとき，$\dfrac{p}{2}>\dfrac{q-p}{4}$ から $2p>q-p$ となり，$3p>q$

$(*)$から $3p>\dfrac{p^3-3p}{2p^2-2}$ となり，$2p^2-2<0$ なので，$3p(2p^2-2)<p^3-3p$

$$5p^3-3p<0,\ p(\sqrt{5}p+\sqrt{3})(\sqrt{5}p-\sqrt{3})<0$$

$0<p<1$ より，$0<p<\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ すなわち $0<p<\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ となる。

［解　説］

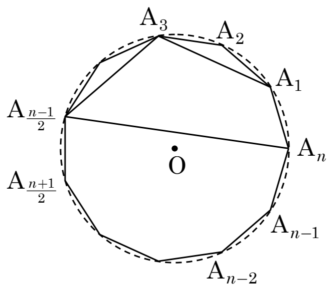
直線のなす角を題材にした基本的な問題です。実質的な内容は(1)だけですが，とりたてて工夫もせずに解いています。

4

問題のページへ

5 以上の奇数 n に対して，点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を $A_1A_2\cdots A_n$ とおく。

そして，n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選び，選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率を p_n，内部に含まない確率を q_n とおく。



まず，n 個の頂点から異なる 4 点を選ぶ場合の数は，

$${}_n\mathrm{C}_4=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)\ \text{（通り）}$$

ここで，n が 7 以上の奇数で，1 つの頂点が A_n の四角形が O を内部に含まないとき，残りの頂点を，$1\leqq i<j<k\leqq\frac{n-1}{2}$ として，A_i，A_j，A_k とする。

このとき，$(i,\ j)$ の選び方の数 N は，$k=3$，$k=4$，…，$k=\frac{n-1}{2}$ の場合を考え，

$$N={}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{\frac{n-3}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}k(k+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{1}{48}(n-5)(n-3)(n-1)\ \text{（通り）}$$

これより，最長辺 A_nA_k で O を内部に含まない四角形は N 個となる。

そして，これらの四角形を O のまわりに回転して考えると，O を内部に含まない四角形は合わせて nN 個となり，

$$nN=\frac{1}{48}n(n-5)(n-3)(n-1)$$

したがって，四角形が O を内部に含まない確率 q_n は，

$$q_n=\frac{nN}{{}_n\mathrm{C}_4}=\frac{24}{48}\cdot\frac{n(n-5)(n-3)(n-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{n-5}{2(n-2)}$$

なお，$n=5$ のとき $q_n=0$ となり，このときも成立している。

さらに，n は奇数のため，点 O が四角形の辺上に位置する場合はないので，$p_n+q_n=1$ となり，

$$p_n=1-q_n=1-\frac{n-5}{2(n-2)}=\frac{n+1}{2(n-2)}$$

［解 説］

誘導のない図形と確率についての問題です。n の値を 5，7，9，…として，余事象を考えるという方針を立てました。