$\boxed{1}$

解答解説のページへ

(1)　正の整数 k に対し，$A_k = \displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$ とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2)　正の整数 n に対し，$B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1)　どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2)　どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，座標平面上の点$(0,\ a)$を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

(1)　C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a は(1)で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ 3)$ を考える。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

(2)　点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

(1)　$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

(2)　$a,\ b$ を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ。

6

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において，不等式$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z<1$を満たす部分をSとする。

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件(i)，(ii)をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $\mathrm{OP}\leqq\sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点にもつ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件(iii)，(iv)，(v)をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$を用いてよい。

(iii) $\mathrm{ON}+\mathrm{NP}\leqq\sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点をもたない。

(v) 線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点にもつ。

1

問題のページへ

(1) $A_k=\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ に対し，$x^2=t\ (x=\sqrt{t})$ とおくと，$2xdx=dt$ から，

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{t}}dt$$

さて，$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ において，$\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{t}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ から，

$$\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{t}}\leqq\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{k\pi}}$$

上式の各辺を，$k\pi$ から $(k+1)\pi$ まで積分することにより，

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt\leqq A_k\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ において，$\sin t$ の符号変化はないので，

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt=\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt\right|=\left|-\left[\cos t\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right|$$

$$=\left|-\cos(k+1)\pi+\cos k\pi\right|=\left|-(-1)^{k+1}+(-1)^k\right|=\left|(-1)^k\right|\left|-(-1)+1\right|=2$$

したがって，①より，$\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx=\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx\right)=\sum_{k=n}^{2n-1}A_k$ なので，②より，

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\sum_{k=n}^{2n-1}A_k\leqq\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

すると，$B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ から，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq B_n\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$l=k-n$ とおき，$n\to\infty$ のときを考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(n+l)\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{l}{n}\right)\pi}}$$

$$\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx\quad(n\to\infty)$$

また，$m=k+1-n$ とおき，$n\to\infty$ のときを考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+m)\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{n}\right)\pi}}$$

$$\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx\quad(n\to\infty)$$

すると，③から，

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\,2\sqrt{(1+x)}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)$$

［解 説］

定積分と不等式の設問に区分求積法を組み合わせた標準的な問題です。ただ，いかめしい雰囲気はありますが。

2

問題のページへ

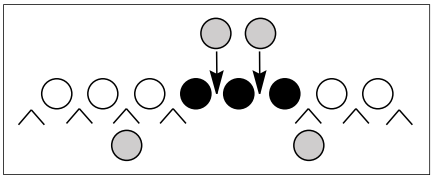
(1)　黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個を横一列に 12 個すべて並べるとき，12! 通りの並べ方が同様に確からしいとする。

このとき，どの赤玉も隣り合わないのは，白玉と黒玉を合わせて 8 個並べ，それらの玉の間または両端の 9 か所から 4 か所を選び，赤玉 4 個を 1 つずつ挿入すると考えると，その確率 p は，

$$p=\frac{8!\times{}_9\mathrm{P}_4}{12!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9}=\frac{14}{55}$$

(2)　どの赤玉も隣り合わず，どの黒玉も隣り合わないのは，

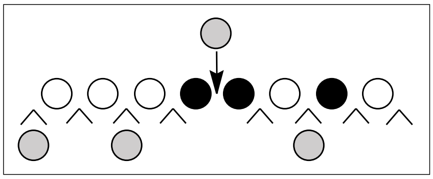
(i)　黒赤黒赤黒の並びがあるとき



まず白玉 5 個と黒玉 3 個の組を並べ，次に赤玉 4 個のうち 2 個を黒玉の間に挿入し，他の赤玉 2 個は白玉 5 個と黒玉 3 個組の間または両端の 7 か所から 2 か所を選び，1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，

$$\frac{(3!\times6!)\times{}_4\mathrm{P}_2\times{}_7\mathrm{P}_2}{12!}=\frac{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{2^2\cdot5\cdot11}$$

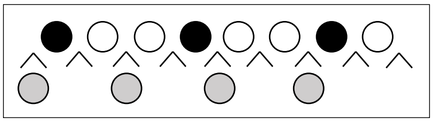
(ii)　黒赤黒の並びがあり黒赤黒赤黒の並びのないとき



まず白玉 5 個を並べ，その間または両端の 6 か所から 2 か所を選び，そこに黒玉 2 個の組と黒玉 1 個を並べる。次に赤玉 4 個のうち 1 個を黒玉の間に挿入し，他の赤玉 3 個は白玉 5 個と黒玉 2 個組と黒玉 1 個の間または両端の 8 か所から 3 か所を選び，1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，

$$\frac{5!\times({}_3\mathrm{P}_2\times1\times{}_6\mathrm{P}_2)\times{}_4\mathrm{P}_1\times{}_8\mathrm{P}_3}{12!}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{2}{3\cdot11}$$

(iii) 黒赤黒の並びがないとき



まず白玉 5 個を並べ，その間または両端の 6 か所から 3 か所を選び，そこに黒玉 3 個を 1 つずつ並べる。次に白玉 5 個と黒玉 3 個の間または両端の 9 か所から 4 か所を選び，赤玉 4 個を 1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，

$$\frac{5!\times{}_6\mathrm{P}_3\times{}_9\mathrm{P}_4}{12!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{1}{11}$$

(i)～(iii)より，どの赤玉も隣り合わず，どの黒玉も隣り合わない確率を r とすると，

$$r=\frac{1}{2^2\cdot 5\cdot 11}+\frac{2}{3\cdot 11}+\frac{1}{11}=\frac{3+2\cdot 20+60}{2^2\cdot 5\cdot 3\cdot 11}=\frac{103}{2^2\cdot 5\cdot 3\cdot 11}$$

よって, どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q は,

$$q=\frac{r}{p}=\frac{103}{2^2\cdot 5\cdot 3\cdot 11}\div\frac{14}{55}=\frac{103}{168}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(1)は定型的な処理ですが, (2)はいろいろな考え方があります。ここでは, 黒赤黒の並びに着目して場合分けを行っています。

3

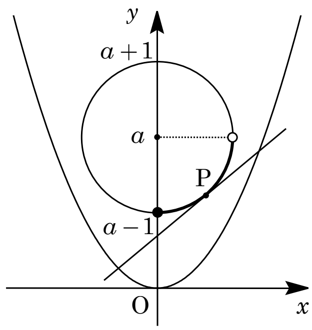
問題のページへ

(1)　円周 $C: x^2+(y-a)^2=1$ 上の任意の点 $(\cos\theta,\ a+\sin\theta)$ が，不等式 $y>x^2$ の表す領域に含まれるとき，$a+\sin\theta>\cos^2\theta$ が成り立ち，

$$a>\cos^2\theta-\sin\theta=1-\sin^2\theta-\sin\theta=-\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，θ は任意の値をとるので $-1\leqq\sin\theta\leqq1$ となり，①の右辺の最大値は $\frac{5}{4}$ なので，①がつねに成り立つ a の範囲は，$a>\frac{5}{4}$ である。

(2)　(1)から，$a>\frac{5}{4}$ のとき，S 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a+\sin\theta)$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<0\right)$ における C の接線の方程式は，



$$x\cos\theta+(a+\sin\theta-a)(y-a)=1$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin\theta+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

放物線 $y=x^2$ ……③との交点は，②③を連立して，

$$x\cos\theta+x^2\sin\theta=a\sin\theta+1$$

$$x^2\sin\theta+x\cos\theta-(a\sin\theta+1)=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$-1\leqq\sin\theta<0$ より，③の判別式を D とすると，$a>\frac{5}{4}$ のとき，

$$D=\cos^2\theta+4\sin\theta(a\sin\theta+1)=(4a-1)\sin^2\theta+4\sin\theta+1$$

$$=(4a-1)\left(\sin\theta+\frac{2}{4a-1}\right)^2+\frac{4a-5}{4a-1}>0$$

そこで，③の実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{-\cos\theta+\sqrt{D}}{2\sin\theta},\quad \beta=\frac{-\cos\theta-\sqrt{D}}{2\sin\theta}$$

さて，交点は $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ と表され，切り取られる線分の長さ L_{P} は，

$$L_{\mathrm{P}}{}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}=\frac{D}{\sin^2\theta}\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\frac{D}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{D}{\sin^4\theta}=\frac{(4a-1)\sin^2\theta+4\sin\theta+1}{\sin^4\theta}$$

ここで，$u=\sin\theta\ (-1\leqq u<0)$ とおくと，θ と u は 1 対 1 の対応をし，さらに $f(u)=\frac{(4a-1)u^2+4u+1}{u^4}=\frac{4a-1}{u^2}+\frac{4}{u^3}+\frac{1}{u^4}$ とおくと，$L_{\mathrm{P}}{}^2=f(u)$ となり，

$$f'(u)=\frac{-2(4a-1)}{u^3}-\frac{12}{u^4}-\frac{4}{u^5}=-\frac{2}{u^5}\{(4a-1)u^2+6u+2\}$$

そこで，$g(u)=(4a-1)u^2+6u+2$ とおくと，$f'(u)=-\frac{2}{u^5}g(u)$ となり，$-\frac{2}{u^5}>0$ に注意すると，$f'(u)$ と $g(u)$ の符号は一致し，

$$g(u)=(4a-1)\left(u+\frac{3}{4a-1}\right)^2+\frac{8a-11}{4a-1}$$

そして，$a>\dfrac{5}{4}$から，$g(-1)=(4a-1)-6+2=4a-5>0$，$g(0)=2>0$となり，$-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{3}{4a-1}<0$である。これをもとに，$g(u)$すなわち$f'(u)$の符号を考えると，

(i)　$8a-11\geqq 0$ $\left(a\geqq\dfrac{11}{8}\right)$のとき

$-1\leqq u<0$において$f'(u)\geqq 0$となり，$f(u)$は単調に増加する。

(ii)　$8a-11<0$ $\left(\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}\right)$のとき

$f'(u)=0$は，$-1\leqq u<0$において異なる 2 実数解をもち，これを$u=u_1$，u_2 $(u_1<u_2)$とおくと，$f(u)$の増減は右表のようになる。これより，ある$f(u)$の値に対してuの値が複数存在する。

u	-1	$\cdots$	u_1	$\cdots$	u_2	$\cdots$	0
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$	$4a-4$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞

(i)(ii)より，$L_Q=L_R$となるS上の相異なる 2 点 Q, R が存在する条件は，

$$\frac{5}{4}<a<\frac{11}{8}$$

［解 説］

放物線と直線の関係を題材にした微分の応用問題です。(2)は最初の設定の方法によって計算量が変わりますが，いずれにせよ対応する関数$L_P{}^2=f(u)$のグラフが蛇行するように処理をすればよいでしょう。

4

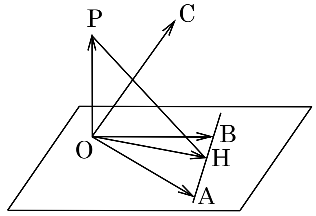
問題のページへ

(1)　4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ 3)$に対し，P$(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$から，

$$2x=0,\ x+y+z=0,\ x+2y+3z=1$$

これより，$x=0$，$y=-1$，$z=1$となり，P$(0,\ -1,\ 1)$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2-t,\ t,\ t)$とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(2-t,\ t,\ t)-(0,\ -1,\ 1)=(2-t,\ t+1,\ t-1)$$

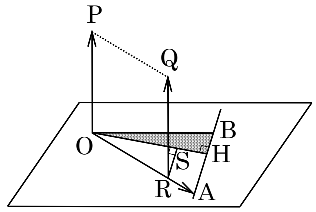
また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 1)$で，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$から，

$$-(2-t)+(t+1)+(t-1)=0$$

よって，$3t-2=0$から$t=\dfrac{2}{3}$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$から OP は平面 OAB に垂直であり，さらに$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$から$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$で定められる点 Q を中心とする半径 r の球面 S が，△OHB と共有点をもつ r の範囲について考える。



まず，点 R から OH に垂線を引き OH との交点を S とおくと，r の最小値は QS である。

ここで，$\mathrm{QR}=\mathrm{PO}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$で，

$$\mathrm{RS}:\mathrm{AH}=\mathrm{OR}:\mathrm{OA}=3:4,\ \mathrm{AH}:\mathrm{AB}=2:3$$

これより，$\mathrm{RS}=\dfrac{3}{4}\mathrm{AH}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$となり，QR は平面 ABC に垂直なので，

$$\mathrm{QS}=\sqrt{\mathrm{QR}^2+\mathrm{RS}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

また，R$\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$から，$\mathrm{RO}=\dfrac{3}{2}$，$\mathrm{RB}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$となり，さらに$\mathrm{RH}<\mathrm{RB}$なので，$r$ の最大値は QO または QB であり，

$$\mathrm{QO}=\sqrt{\mathrm{QR}^2+\mathrm{OR}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

以上より，求める r の範囲は$\dfrac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$である。

[解　説]

空間ベクトルの応用についての標準題です。△OHB が直角三角形という点に着目すれば，後は計算だけになります。

5

問題のページへ

(1)　$g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q_1(x)$，余りを $r(x)$ とおくと，

$$g(x)=f(x)q_1(x)+r(x)$$

両辺を 7 乗すると，

$$g(x)^7=\{f(x)q_1(x)+r(x)\}^7=\sum_{k=0}^{6}{}_7\mathrm{C}_k\,f(x)^{7-k}q_1(x)^{7-k}r(x)^k+r(x)^7$$

$$=f(x)\sum_{k=0}^{6}{}_7\mathrm{C}_k\,f(x)^{6-k}q_1(x)^{7-k}r(x)^k+r(x)^7$$

これより，$g(x)^7-r(x)^7=f(x)\sum_{k=0}^{6}{}_7\mathrm{C}_k\,f(x)^{6-k}q_1(x)^{7-k}r(x)^k$ となるので，$g(x)^7-r(x)^7$ は $f(x)$ で割り切れる。

すなわち，$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しい。

(2)　$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った商を $q_2(x)$，余りを $h_1(x)$ とし，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った商を $q_3(x)$，余りを $h_2(x)$ としたとき，$h_2(x)=h(x)$ ならば，

$$h(x)^7=f(x)q_2(x)+h_1(x)\cdots\cdots\text{①},\quad h_1(x)^7=f(x)q_3(x)+h(x)\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$\{h(x)^7-f(x)q_2(x)\}^7=f(x)q_3(x)+h(x)$

(1)と同様にすると，$h(x)^{49}-h(x)$ は，$f(x)=(x-1)^2(x-2)$ で割り切れる。

ここで，$H(x)=h(x)^{49}-h(x)$ とおき，整式 $H(x)$ が $f(x)$ で割り切れる必要十分条件は，$H(1)=0\cdots\cdots$③，$H(2)=0\cdots\cdots$④，$H'(1)=0\cdots\cdots$⑤であることを示す。

(a)　$H(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とおくと，

$$H(x)=(x-1)^2(x-2)Q_1(x)$$

$$H'(x)=2(x-1)(x-2)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1(x)+(x-1)^2(x-2){Q_1}'(x)$$

これより③④⑤が成り立つ。

(b)　逆に③④⑤が成り立つとき，③④から $H(x)$ は $(x-1)(x-2)$ で割り切れる。

$H(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ として，

$$H(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)$$

$$H'(x)=(x-2)Q_2(x)+(x-1)Q_2(x)+(x-1)(x-2){Q_2}'(x)$$

すると，⑤より $Q_2(1)=0$ となり，$Q_2(x)$ は $x-1$ で割り切れるので，$Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ として，

$$Q_2(x)=(x-1)Q_3(x)$$

まとめると，$H(x)=(x-1)(x-2)(x-1)Q_3(x)=(x-1)^2(x-2)Q_3(x)$ となり，$H(x)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(a)(b)より，$H(x)$ が $f(x)$ で割り切れる必要十分条件は，③かつ④かつ⑤である。

さて，$h(x)=x^2+ax+b$ から，$H(x)=(x^2+ax+b)^{49}-(x^2+ax+b)$

$$H'(x)=49(x^2+ax+b)^{48}(2x+a)-(2x+a)$$

③より，$(1+a+b)^{49}-(1+a+b)=0$ となり，

$$(1+a+b)^{49}=1+a+b\cdots\cdots\cdots⑥$$

④より，$(4+2a+b)^{49}-(4+2a+b)=0$ となり，

$$(4+2a+b)^{49}=4+2a+b\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤より，$49(1+a+b)^{48}(2+a)-(2+a)=0$ となり，

$$49(1+a+b)^{48}(2+a)=2+a\cdots\cdots\cdots⑧$$

(i)　$1+a+b=0$ のとき

⑥は成り立ち，⑧から $2+a=0$ すなわち $a=-2$ となり，$b=-1-(-2)=1$

このとき，$4+2a+b=1$ となり，⑦は成り立っている。

(ii)　$1+a+b\neq 0$ のとき

⑥より，$(1+a+b)^{48}=1$ となり，$1+a+b=\pm 1$

(ii-i)　$1+a+b=1$ のとき

⑧から $49(2+a)=2+a$ となり，$2+a=0$ すなわち $a=-2$

また，$b=1+2-1=2$ となり，$4+2a+b=2$ から⑦は成り立たない。

(ii-ii)　$1+a+b=-1$ のとき

⑧から $49(2+a)=2+a$ となり，$2+a=0$ すなわち $a=-2$

また，$b=-1+2-1=0$ となり，$4+2a+b=0$ から⑦は成り立っている。

(i)(ii)より，求める a, b の組は，$(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-2,\ 0)$ である。

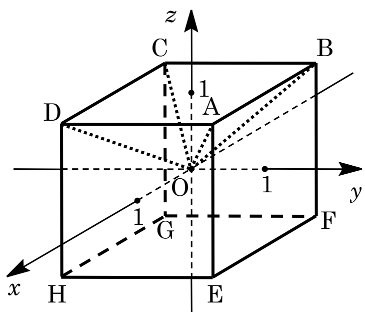
[解　説]

整式の除法を題材にした問題です。(2)で，$g(x)=h(x)^7$ とおいて，(1)の結論にあてはめると，少し省スペースになります。なお，$H(x)$ が $f(x)$ で割り切れる必要十分条件が③かつ④かつ⑤であることの記述については，省略してもよいのかどうか迷いました。上の解答例では簡単に記しておきましたが。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　O を原点とする座標空間において，A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 1)$，D$(1,\ -1,\ 1)$，E$(1,\ 1,\ -1)$，F$(-1,\ 1,\ -1)$，G$(-1,\ -1,\ -1)$，H$(1,\ -1,\ -1)$とおく。



ここで，$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す立方体の表面のうち $z<1$ を満たす部分 S は，立方体 ABCD-EFGH の面 ABCD 以外の 5 つの面を表す。

さて，$\mathrm{OP}\leqq\sqrt{3}$ で，線分 OP と S は共有点をもたないか点 P のみを共有点にもつという条件を満たす点 P の動きうる範囲 V は，

(a)　立方体 ABCD-EFGH の内部または面上

この場合の点 P の動きうる範囲の体積は，$2^3=8$ である。

(b)　平面 ABCD の上側

この場合の点 P の動きうる範囲は，平面 OAB，平面 OBC，平面 OCD，平面 ODA の上側で，O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球の内部または面上となり，対称性から，その体積は，$\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3-2^3\right\}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\dfrac{4}{3}$ である。

(a)(b)より，範囲 V の体積は，$8+\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi+\dfrac{20}{3}$ である。

(2)　$\mathrm{ON}+\mathrm{NP}\leqq\sqrt{3}$ で，線分 ON と S は共有点をもたず，線分 NP と S は共有点をもたないか点 P のみを共有点にもつという条件を満たす点 P の動きうる範囲 W は，

(c)　O, N, P が一直線上にあるとき

この場合の点 P の動きうる範囲は(1)と同じより，その体積は $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi+\dfrac{20}{3}$ である。

(d)　O, N, P が一直線上にないとき

以下，(c)の場合に含まれない点 P の動きうる範囲を求める。

この場合は，点 N が正方形 ABCD の辺上にあるときを考えればよいので，まず辺 AB の中点を M とし，点 N が線分 AM 上にある場合を考える。

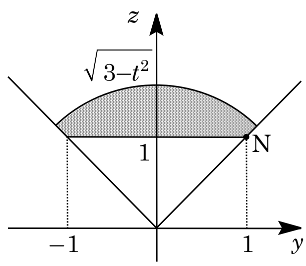
まず，準備として，(b)の場合の点 P の動きうる範囲を表すと，

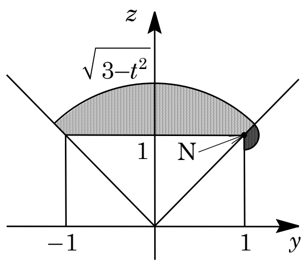
$$z\geqq 1,\ z\geqq x,\ z\geqq -x,\ z\geqq y,\ z\geqq -y,\ x^2+y^2+z^2\leqq 3$$

ここで，$0\leqq t\leqq 1$ として，点 N$(t,\ 1,\ 1)$ を通る平面 $x=t$ での断面を表す不等式は，

$$z\geqq 1,\ z\geqq t,\ z\geqq -t,\ z\geqq y,\ z\geqq -y$$
$$y^2+z^2\leqq 3-t^2$$

図示すると，右図の網点部となる。





そして, O, N, P が一直線上にないとき, 新たに追加される点 P の動きうる範囲は, 点 N を中心とし, 半径 $r=\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}$ で, 中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ のおうぎ形となる。図示すると, 右図の濃い網点部である。

なお, $t=0\to 1$ のとき $r=\sqrt{3}-\sqrt{2}\to 0$ と, t の増加にともなって r の値は単調に減少する。

さて, この断面積は, $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{8}\pi\left(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2}\right)$ となり, O, N, P が一直線上にないときに, 新たに追加される点 P の動きうる範囲の体積は, 対称性を考えて,

$$4\times 2\int_0^1\frac{3}{8}\pi\left(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2}\right)dt=3\pi\int_0^1\left(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2}\right)dt$$
$$=3\pi\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-6\sqrt{2}\pi\int_0^1\sqrt{3-t^2}\,dt=14\pi-6\sqrt{2}\pi\int_0^1\sqrt{3-t^2}\,dt$$

ここで, $I=\displaystyle\int_0^1\sqrt{3-t^2}\,dt$ とし, $t=\sqrt{3}\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置き換えると, $dt=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$ となり, また $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から, $t=0\to 1$ のとき $\theta=0\to\alpha$ である。

$$I=\int_0^\alpha\sqrt{3-3\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta=3\int_0^\alpha\cos^2\theta\,d\theta=\frac{3}{2}\int_0^\alpha(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\alpha=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって, $14\pi-6\sqrt{2}\pi I=14\pi-6\sqrt{2}\pi\left(\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=(8-9\sqrt{2}\alpha)\pi$ となる。

(c)(d)より, 範囲 W の体積は,

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi+\frac{20}{3}\right)+(8-9\sqrt{2}\alpha)\pi=\left(8+\frac{2}{3}\sqrt{3}-9\sqrt{2}\alpha\right)\pi+\frac{20}{3}$$

［解 説］

立体の体積を求める難問です。(1)は, 初めは積分で求めようと思いましたがうまくいかず, 対称性を利用した方法になりました。(2)は, 線分 OP が折れ曲がることにより, 立方体の上面の正方形 ABCD の各辺から「あふれ出る範囲」の体積を求めるものですが, かなり感覚に依存した記述になっています。