1

解答解説のページへ

k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。k が $k>2$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を l とおく。実数 t に対し，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と l の距離を $f(t)$ とする。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分 $g(a)=\displaystyle\int_{-1}^{a} f(t)\,dt$ を求めよ。

(2) a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1)　どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2)　どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$ を満たしているとする。

(1)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の体積を求めよ。

1

問題のページへ

$k>0$ のとき，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解 α，β に対して，

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-k,\ \alpha^2+\beta^2=(-1)^2-2(-k)=1+2k$$

ここで，$P=\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ とおき，k が $k>2$ の範囲を動くとき，

$$P=\frac{\alpha^3-\alpha^4+\beta^3-\beta^4}{(1-\alpha)(1-\beta)}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{-1-3k-(1+4k+4k^2-2k^2)}{1+1-k}=\frac{-2-7k-2k^2}{2-k}=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}$$

$$=\frac{(k-2)(2k+11)+24}{k-2}=2k+11+\frac{24}{k-2}=2(k-2)+\frac{24}{k-2}+15$$

さて，$k-2>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$P\geqq 2\sqrt{2(k-2)+\frac{24}{k-2}}+15=2\sqrt{48}+15=8\sqrt{3}+15$$

なお，等号は，$2(k-2)=\dfrac{24}{k-2}$ のとき，すなわち $(k-2)^2=12$ から $k-2=2\sqrt{3}$ となり，$k=2+2\sqrt{3}$ のときに成立する。

以上より，求める $P=\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値は，$8\sqrt{3}+15$ である。

［解　説］

分数式の最小値について，相加平均と相乗平均の関係を用いて求める基本題です。

2

問題のページへ

(1) 放物線 $C: y=3x^2-4x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と直線 $l: 2x-y=0$ の距離 $f(t)$ は,

$$f(t)=\frac{|2t-(3t^2-4t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}|-3t^2+6t|=\frac{3}{\sqrt{5}}|t^2-2t|$$

さて, $-1\leqq a\leqq 2$ のとき, $g(a)=\int_{-1}^{a}f(t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}|t^2-2t|dt$ とおくと,

(i) $-1\leqq a<0$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}(t^2-2t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\Big[\frac{t^3}{3}-t^2\Big]_{-1}^{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(a^3+1)-3(a^2-1)\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)$$

(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{0}(t^2-2t)dt+\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{0}^{a}-(t^2-2t)dt$$
$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\Big[\frac{t^3}{3}-t^2\Big]_{-1}^{0}-\frac{3}{\sqrt{5}}\Big[\frac{t^3}{3}-t^2\Big]_{0}^{a}=\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)$$

(2) $0\leqq a\leqq 2$ のとき, $f(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}|a^2-2a|=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-2a)$ となり, このとき,

$h(a)=g(a)-f(a)$ とおくと, (1)から,

$$h(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)+\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-2a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-6a^2+6a-4)$$
$$h'(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2-12a+6)=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-4a+2)$$

$h'(a)=0$ の解は $a=2\pm\sqrt{2}$ となり, $0\leqq a\leqq 2$ における $h(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	↘		↗	$\frac{8}{\sqrt{5}}$

すると, 最大値は $h(2)=\frac{8}{\sqrt{5}}$ である。

そして, 最小値を求めるために, a^3-6a^2+6a-4 を a^2-4a+2 で割ると,

$$a^3-6a^2+6a-4=(a^2-4a+2)(a-2)-4a$$

これより, $a=2-\sqrt{2}$ のとき $a^3-6a^2+6a-4=-4(2-\sqrt{2})$ となり, 最小値は,

$$h(2-\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-4)(2-\sqrt{2})=\frac{4}{\sqrt{5}}(2-\sqrt{2})$$

[解　説]

計算を主体とした微積分の総合問題です。上の解答例では記述を省きましたが, $y=|t^2-2t|$ のグラフを書いておくと, ミスが少なくなるでしょう。

3

問題のページへ

(1)　黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個を横一列に 12 個すべて並べるとき，12! 通りの並べ方が同様に確からしいとする。

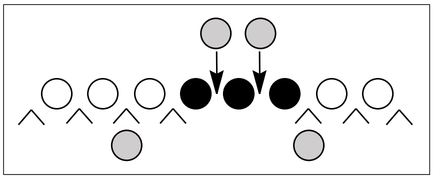
このとき，どの赤玉も隣り合わないのは，白玉と黒玉を合わせて 8 個並べ，それらの玉の間または両端の 9 か所から 4 か所を選び，赤玉 4 個を 1 つずつ挿入すると考えると，その確率 p は，

$$p=\frac{8!\times{}_9\mathrm{P}_4}{12!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9}=\frac{14}{55}$$

(2)　どの赤玉も隣り合わず，どの黒玉も隣り合わないのは，

(i)　黒赤黒赤黒の並びがあるとき

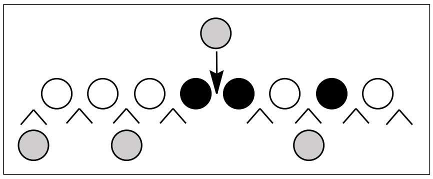
まず白玉 5 個と黒玉 3 個の組を並べ，次に赤玉 4 個のうち 2 個を黒玉の間に挿入し，他の赤玉 2 個は白玉 5 個と黒玉 3 個組の間または両端の 7 か所から 2 か所を選び，1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，



$$\frac{(3!\times6!)\times{}_4\mathrm{P}_2\times{}_7\mathrm{P}_2}{12!}=\frac{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{1}{2^2\cdot5\cdot11}$$

(ii)　黒赤黒の並びがあり黒赤黒赤黒の並びのないとき

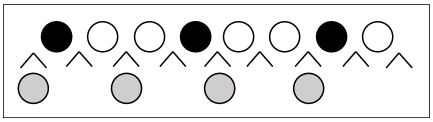
まず白玉 5 個を並べ，その間または両端の 6 か所から 2 か所を選び，そこに黒玉 2 個の組と黒玉 1 個を並べる。次に赤玉 4 個のうち 1 個を黒玉の間に挿入し，他の赤玉 3 個は白玉 5 個と黒玉 2 個組と黒玉 1 個の間または両端の 8 か所から 3 か所を選び，1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，



$$\frac{5!\times({}_3\mathrm{P}_2\times1\times{}_6\mathrm{P}_2)\times{}_4\mathrm{P}_1\times{}_8\mathrm{P}_3}{12!}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{2}{3\cdot11}$$

(iii) 黒赤黒の並びがないとき

まず白玉 5 個を並べ，その間または両端の 6 か所から 3 か所を選び，そこに黒玉 3 個を 1 つずつ並べる。次に白玉 5 個と黒玉 3 個の間または両端の 9 か所から 4 か所を選び，赤玉 4 個を 1 つずつ挿入すると考えると，その確率は，



$$\frac{5!\times{}_6\mathrm{P}_3\times{}_9\mathrm{P}_4}{12!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{1}{11}$$

(i)～(iii)より，どの赤玉も隣り合わず，どの黒玉も隣り合わない確率を r とすると，

$$r=\frac{1}{2^2\cdot5\cdot11}+\frac{2}{3\cdot11}+\frac{1}{11}=\frac{3+2\cdot20+60}{2^2\cdot5\cdot3\cdot11}=\frac{103}{2^2\cdot5\cdot3\cdot11}$$

よって, どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q は,

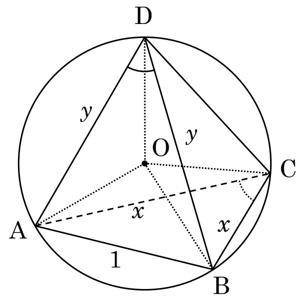
$$q=\frac{r}{p}=\frac{103}{2^2\cdot5\cdot3\cdot11}\div\frac{14}{55}=\frac{103}{168}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(1)は定型的な処理ですが, (2)はいろいろな考え方があります。ここでは, 黒赤黒の並びに着目して場合分けを行っています。

4

問題のページへ



(1)　中心が点 O で半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D に対して，AB $=1$，AC $=$ BC $=x$，AD $=$ BD $=y$，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$ のとき，まず△ABC に余弦定理を適用すると，

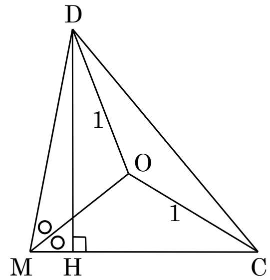
$$x^2+x^2-2x^2\cos\angle\mathrm{ACB}=1^2,\ 2x^2-\frac{8}{5}x^2=1$$

すると，$\dfrac{2}{5}x^2=1$ より $x^2=\dfrac{5}{2}$ となり，$x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

そこで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}x^2\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{4}$$

(2)　△ABD に余弦定理を適用すると，(1)と同様にして，$y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ となる。



ここで，線分 AB の中点を M，点 D から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC の交点を H とおくと，四面体 ABCD が平面 DMC に関して対称であることから，中心 O と点 H は平面 DMC 上にある。

さて，△OAB は正三角形なので，OM $=1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また，$x=y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ より，CM $=$ DM $=\sqrt{\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ となり，これより $\angle\mathrm{OMC}=\angle\mathrm{OMD}$ である。

そこで，$\theta=\angle\mathrm{OMC}$ とおき，△OMC に余弦定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos\theta=1^2,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta=2$$

すると，$\cos\theta=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ から，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{16}{27}}=\dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$ となるので，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DM}\sin 2\theta=\frac{3}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{11}$$

よって，四面体 ABCD の体積を V とおくと，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}\sqrt{11}=\frac{\sqrt{11}}{9}$$

［解 説］

四面体を題材とした計量問題です。(2)のポイントは対称性に着目することです。