1

解答解説のページへ

a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく。C は, 原点で垂直に交わる 2 本の接線 l_1 , l_2 をもつとする。ただし, C と l_1 の接点 P_1 の x 座標は, C と l_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

(1) b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

(2) $i=1$, 2 に対し, 円 D_i を, 放物線 C の軸上に中心をもち, 点 P_i で l_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき, a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3 - \alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を l とする。C と l は相異なる 3 点で交わるとする。

(1)　α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β，γ とする。ただし，$\beta < \gamma$ とする。$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ。

(3)　(2)の β，γ を用いて，$u = 4\alpha^3 + \dfrac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$ と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = 4\,,\ \ a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，…，X_N を以下の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　X_0 は O にある。

(ii)　n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合，$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$ により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1)　$N=5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2)　$N=98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1) 放物線$C: y=x^2+ax+b$に対して，$y'=2x+a$である。

ここで，$s<t$として，接点$P_1(s,\ s^2+as+b)$，$P_2(t,\ t^2+at+b)$とおくと，

$l_1: y-(s^2+as+b)=(2s+a)(x-s)$，$y=(2s+a)x-s^2+b$

同様に，$l_2: y=(2t+a)x-t^2+b$となる。

まず，l_1，l_2が原点を通ることより，$-s^2+b=0$，$-t^2+b=0$となり，

$s^2=b$ ………①，$t^2=b$ ………②

$s<t$を満たすs, tで，①②が成り立つ条件は$b>0$であり，このもとで，

$s=-\sqrt{b}$ ………③，$t=\sqrt{b}$ ………④

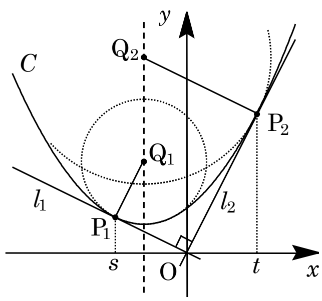
そして，l_1とl_2は直交することから，$(2s+a)(2t+a)=-1$となり，③④から，

$(-2\sqrt{b}+a)(2\sqrt{b}+a)=-1$，$-4b+a^2=-1$ ………⑤

よって，$b=\frac{1}{4}(a^2+1)$ ……⑥となり，$b>0$は任意の実数aで満たされている。

(2) ⑥より，$C: y=x^2+ax+\frac{1}{4}(a^2+1)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

となり，放物線Cの軸の方程式は$x=-\frac{a}{2}$である。



さて，点P_1でl_1と接する円D_1の中心Q_1，点P_2でl_2と接する円D_2の中心Q_2は，ともにCの軸上にあり，⑥から$\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$なので，$-\sqrt{b}<-\frac{a}{2}<\sqrt{b}$である。

そして，$P_1Q_1 \parallel l_2$，$P_2Q_2 \parallel l_1$に注意すると，

$$P_1Q_1=\left(-\frac{a}{2}-s\right)\sqrt{1+(2t+a)^2}=\frac{1}{2}(2\sqrt{b}-a)\sqrt{1+(2\sqrt{b}+a)^2}$$

$$P_2Q_2=\left(t+\frac{a}{2}\right)\sqrt{1+(2s+a)^2}=\frac{1}{2}(2\sqrt{b}+a)\sqrt{1+(2\sqrt{b}-a)^2}$$

⑤から，$P_1Q_1=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{b}-a)^2+1}$，$P_2Q_2=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{b}+a)^2+1}$となる。

ここで，$2P_1Q_1=P_2Q_2$から，$2\sqrt{(2\sqrt{b}-a)^2+1}=\sqrt{(2\sqrt{b}+a)^2+1}$となり，

$4(4b-4a\sqrt{b}+a^2+1)=4b+4a\sqrt{b}+a^2+1$，$12b-20a\sqrt{b}+3a^2+3=0$

⑥より，$3a^2+3-10a\sqrt{a^2+1}+3a^2+3=0$となり，

$6(a^2+1)=10a\sqrt{a^2+1}$，$3\sqrt{a^2+1}=5a$

すると，$a>0$において$9(a^2+1)=25a^2$から$16a^2=9$となり，$a=\frac{3}{4}$である。

［解　説］

放物線の接線を題材に，円を融合した問題です。(1)は接点を設定して微分法を利用しましたが，重解条件で処理する方法も考えられます。

2

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y=x^3-x$ ……①に対して，$y'=3x^2-1$ となり，C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ における法線 l の方程式は，その法線ベクトルの成分を $(1,\ 3\alpha^2-1)$ として，

$$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)(y-\alpha^3+\alpha)=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)(x^3-x-\alpha^3+\alpha)=0$ となり，

$$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)\{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)-(x-\alpha)\}=0$$

$$(x-\alpha)\{1+(3\alpha^2-1)(x^2+\alpha x+\alpha^2-1)\}=0$$

$$(x-\alpha)\{(3\alpha^2-1)x^2+(3\alpha^2-1)\alpha x+3\alpha^4-4\alpha^2+2\}=0$$

$$x=\alpha,\ (3\alpha^2-1)x^2+(3\alpha^2-1)\alpha x+3\alpha^4-4\alpha^2+2=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，C と l は相異なる 3 点で交わるので，③は $x\neq\alpha$ の異なる 2 実数解をもち，

$$3\alpha^2-1\neq 0 \cdots\cdots ④,\ (3\alpha^2-1)\alpha^2+(3\alpha^2-1)\alpha^2+3\alpha^4-4\alpha^2+2\neq 0 \cdots\cdots ⑤$$

$$D=(3\alpha^2-1)^2\alpha^2-4(3\alpha^2-1)(3\alpha^4-4\alpha^2+2)>0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より，$\alpha\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から $\alpha\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となる。

⑤をまとめると，$9\alpha^4-6\alpha^2+2\neq 0$ となり，$(3\alpha^2-1)^2+1>0$ から成立する。

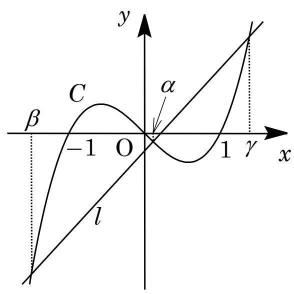
⑥より，$(3\alpha^2-1)\{(3\alpha^2-1)\alpha^2-4(3\alpha^4-4\alpha^2+2)\}>0$ となり，

$$(3\alpha^2-1)(9\alpha^4-15\alpha^2+8)<0,\ (3\alpha^2-1)\left\{\left(3\alpha^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}<0$$

すると，$3\alpha^2-1<0$ から $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，④を満たす。

よって，α のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(2)　③の実数解が $x=\beta,\ \gamma\ (\beta<\gamma)$ より，$\beta+\gamma=-\alpha$，$\beta\gamma=\dfrac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}$ であるので，



$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1$$

$$=\alpha^2-\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}-1=-\frac{1}{3\alpha^2-1}$$

よって，$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となる。

(3)　$u=4\alpha^3+\dfrac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$ から，

$$u'=12\alpha^2-6\alpha$$

$$=6\alpha(2\alpha-1)$$

すると，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ における u の増減は右表のようになり，u のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}<u\leqq 1$ である。

α	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$

［解 説］

計算量が多めの微分の応用問題です。(1)では，法線の法線ベクトルとして，接線の方向ベクトルを流用し，少し工夫をしています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n{}^2+n(n+2)$ で定められる $\{a_n\}$ に対し，以下 $\bmod 3$ で記すと，

$$a_1=4\equiv 1,\ a_2=a_1{}^2+1\cdot 3\equiv 1^2+1\cdot 0\equiv 1$$
$$a_3=a_2{}^2+2\cdot 4\equiv 1^2+2\cdot 1\equiv 3\equiv 0,\ a_4=a_3{}^2+3\cdot 5\equiv 0^2+0\cdot 2\equiv 0$$
$$a_5=a_4{}^2+4\cdot 6\equiv 0^2+1\cdot 0\equiv 0,\ a_6=a_5{}^2+5\cdot 7\equiv 0^2+2\cdot 1\equiv 2$$
$$a_7=a_6{}^2+6\cdot 8\equiv 2^2+0\cdot 2\equiv 4\equiv 1,\ a_8=a_7{}^2+7\cdot 9\equiv 1^2+1\cdot 0\equiv 1$$

これより，k を 0 以上の整数として，次式(＊)のように予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

$$a_{6k+1}\equiv 1,\ a_{6k+2}\equiv 1,\ a_{6k+3}\equiv 0,\ a_{6k+4}\equiv 0,\ a_{6k+5}\equiv 0,\ a_{6k+6}\equiv 2\cdots\cdots(*)$$

(i)　$k=0$ のとき　上記の計算より成立している。

(ii)　$k=l$ のとき　(＊)の成立を仮定すると，

$$a_{6l+7}=a_{6l+6}{}^2+(6l+6)(6l+8)\equiv 2^2+0\cdot 2\equiv 4\equiv 1$$
$$a_{6l+8}=a_{6l+7}{}^2+(6l+7)(6l+9)\equiv 1^2+1\cdot 0\equiv 1$$
$$a_{6l+9}=a_{6l+8}{}^2+(6l+8)(6l+10)\equiv 1^2+2\cdot 1\equiv 3\equiv 0$$
$$a_{6l+10}=a_{6l+9}{}^2+(6l+9)(6l+11)\equiv 0^2+0\cdot 2\equiv 0$$
$$a_{6l+11}=a_{6l+10}{}^2+(6l+10)(6l+12)\equiv 0^2+1\cdot 0\equiv 0$$
$$a_{6l+12}=a_{6l+11}{}^2+(6l+11)(6l+13)\equiv 0^2+2\cdot 1\equiv 2$$

よって，$k=l+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，0 以上のすべての整数 k に対して，(＊)は成立している。

すると，$2022=6\times 337=6\times 336+6$ なので $a_{2022}\equiv 2$，すなわち a_{2022} を 3 で割った余りは 2 である。

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を G とおき，p, q, r を整数として，

$$a_{2022}=Gp,\ a_{2023}=Gq,\ a_{2024}=Gr\ \ (p, q, r\ \text{の最大公約数は}\ 1)$$

ここで，$a_{2023}=a_{2022}{}^2+2022\cdot 2024$ なので，$Gq=G^2p^2+2022\cdot 2024$ となり，

$$G(q-p^2)=2022\cdot 2024,\ G(q-p^2)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23\cdot 337\cdots\cdots\cdots①$$

また，$a_{2024}=a_{2023}{}^2+2023\cdot 2025$ なので，$Gr=G^2q^2+2023\cdot 2025$ となり，

$$G(r-q^2)=2023\cdot 2025,\ G(r-q^2)=3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，G は 3 の約数となるが，(1)から $a_{2022}\equiv 2$ なので a_{2022} は 3 の倍数ではない。これより $G=1$ となり，a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数は 1 である。

［解 説］

漸化式と整数の問題です。(2)の①②は素因数分解で処理しましたが，ここはユークリッドの互除法を利用しても構いません。

$\boxed{4}$

問題のページへ

0 以上の整数 k に対して $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より，l を 0 以上の整数として，

$$\overrightarrow{v_{3l}}=(1,\ 0),\ \overrightarrow{v_{3l+1}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{v_{3l+2}}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより，$\overrightarrow{v_{3l}}+\overrightarrow{v_{3l+1}}+\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ である。

さて，コインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0=\mathrm{O}$，X_1，X_2，…，X_N を，次の規則で定める。

まず，表が出たとき，$\overrightarrow{v_{3l}}$ だけ移動するのが a 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ だけ移動するのが b 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ だけ移動するのが c 回とする。また，裏が出たときは移動しないので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_N}=a\overrightarrow{v_{3l}}+b\overrightarrow{v_{3l+1}}+c\overrightarrow{v_{3l+2}}=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$$

(1)　$N=5$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OX}_5}=\vec{0}$ となるのは，$a\overrightarrow{v_{3l}}+b\overrightarrow{v_{3l+1}}+c\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ から，

$$a=b=c$$

そして，$0\leqq a+b+c\leqq 5$ から，$a=b=c=0$ または $a=b=c=1$ である。

ここで，コイン投げで表が出たのを○，裏が出たのを×で表すと，

・$a=b=c=0$ のとき

×が 5 回から「×××××」の場合だけとなり，その確率は $\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$ である。

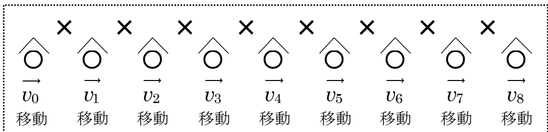
・$a=b=c=1$ のとき

×は 2 回から，$\overrightarrow{v_i}$ $(0\leqq i\leqq 2)$ について，$\overrightarrow{v_{3l}}$ $(\overrightarrow{v_0})$ の移動が 1 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ $(\overrightarrow{v_1})$ の移動が 1 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ $(\overrightarrow{v_2})$ の移動が 1 回である。すると，「○×○×○」の場合だけとなり，その確率は $\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$ である。

よって，$\mathrm{X}_5=\mathrm{O}$ となる確率は，$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{16}$ である。

(2)　$N=98$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OX}_{98}}=\vec{0}$ なるのは，$a=b=c$ のときで，しかも○が 90 回なので $a=b=c=30$ となる。

そして，×は 8 回から，$\overrightarrow{v_i}$ $(0\leqq i\leqq 8)$ について，$\overrightarrow{v_{3l}}$ $(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_3},\ \overrightarrow{v_6})$ の移動が 30 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ $(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_4},\ \overrightarrow{v_7})$ の移動が 30 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ $(\overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_5},\ \overrightarrow{v_8})$ の移動が 30 回である。



ここで，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_6}$ の移動が，それぞれ a_1，a_2，a_3 回とすると，

$$a_1+a_2+a_3=30$$

ただし，$a_1\geqq 0$，$a_2\geqq 0$，$a_3\geqq 0$ である。

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組は，

$${}_3\mathrm{H}_{30}={}_{32}\mathrm{C}_{30}={}_{32}\mathrm{C}_2=\frac{32\cdot 31}{2}=2^4\cdot 31\ \text{（通り）}$$

同様に，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_4}$，$\overrightarrow{v_7}$ の移動が，それぞれ b_1，b_2，b_3 回とすると，

$b_1+b_2+b_3=30$ （$b_1 \geqq 0$，$b_2 \geqq 0$，$b_3 \geqq 0$）

すると，(b_1, b_2, b_3) の組は，${}_3\mathrm{H}_{30}=2^4\cdot 31$ （通り）

さらに，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_5}$，$\overrightarrow{v_8}$ の移動が，それぞれ c_1，c_2，c_3 回とすると，

$c_1+c_2+c_3=30$ （$c_1 \geqq 0$，$c_2 \geqq 0$，$c_3 \geqq 0$）

すると，(c_1, c_2, c_3) の組は，${}_3\mathrm{H}_{30}=2^4\cdot 31$ （通り）

以上より，$\mathrm{X}_{98}=\mathrm{O}$ で，表が 90 回，裏が 8 回出る確率は，

$$\frac{(2^4\cdot 31)^3}{2^{98}}=\frac{31^3}{2^{86}}$$

［解　説］

読解力が要求される難しめの確率問題です。ポイントは，$\overrightarrow{v_{3l}}+\overrightarrow{v_{3l+1}}+\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ の関係をベースに，具体的に○と×のパターンを調べていくことです。