1　解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ p$ を実数とする。不等式

$$ax^2+bx+c>0\,,\ \ bx^2+cx+a>0\,,\ \ cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1)　$a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上であることを示せ。

(2)　$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3)　$p=0$ であることを示せ。

2

解答解説のページへ

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}\,,\quad y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える。

(1)　$-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3)　t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数 2^m $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1)　2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2)　1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3)　$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口，および平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　A, α を実数とする。θ の方程式 $A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$ を考える。$A>1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ。

(2)　座標平面上の楕円 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ を考える。また，$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式 $2x^2 + y^2 < r^2$ が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 $r\,(0<r<1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

1

問題のページへ

(1)　$ax^2+bx+c>0$ ……①，$bx^2+cx+a>0$ ……②，$cx^2+ax+b>0$ ……③に対し，この連立不等式の解は，条件より $x>p$ である。ここで，$a<0$ とすると，

$$\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=-\infty$$

これより，十分に大きな x に対し，$ax^2+bx+c<0$ となるので，①の解が $x>p$ を含むことはない。よって，$a\geqq 0$ である。

同様にすると，②から $b\geqq 0$，③から $c\geqq 0$ となる。

(2)　$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ とすると，(1)と同様にして，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(bx^2+cx+a)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}(cx^2+ax+b)=\infty$$

これより，十分に小さな x に対して，①②③はいずれも成立する。

すると，連立不等式①②③の解が $x>p$ であることに反するので，(1)の結論から a, b, c の少なくとも 1 個は 0 である。

(3)　(1)(2)より，まず，$a=0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ のときを考えると，①②③より，

$$bx+c>0 \text{ ………④},\quad bx^2+cx>0 \text{ ………⑤},\quad cx^2+b>0 \text{ ………⑥}$$

⑤より $x(bx+c)>0$ なので，④から $x>0$ ……⑦となり，

(i)　$b=0$ のとき

④より $c>0$ なので，⑥から $cx^2>0$ すなわち $x\neq 0$ となる。これより，連立不等式④⑥⑦の解は $x>0$ である。

(ii)　$b>0$ のとき

$c\geqq 0$ から⑦のもとで④⑥は成立するので，連立不等式④⑥⑦の解は $x>0$ である。

(i)(ii)より，連立不等式④⑤⑥の解は $x>0$ である。

また，$a\geqq 0$，$b=0$，$c\geqq 0$ のとき，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c=0$ のときも同様に考えると，連立不等式①②③の解はいずれの場合も $x>0$ であるので，$p=0$ となる。

［解　説］

連立不等式が題材の論証問題です。どの設問もグラフを対応させて考えています。

2　　問題のページへ

面積が 1 である△ABC に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおき，平面上の点 X から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の長さを，それぞれ h_1，h_2，h_3 とすると，

$$\triangle\mathrm{ABX}=\frac{1}{2}ch_3,\ \triangle\mathrm{BCX}=\frac{1}{2}ah_1,\ \triangle\mathrm{CAX}=\frac{1}{2}bh_2$$

さて，条件より，$2\leqq\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3$ ……①なので，

$$2\leqq\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}bh_2\leqq 3,\ 4\leqq ah_1+bh_2+ch_3\leqq 6\ \cdots\cdots\cdots②$$

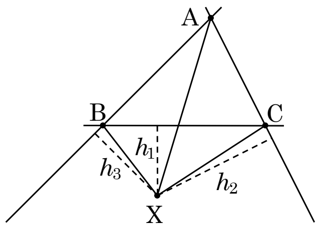
まず，点 X が△ABC の内部または辺上にあるときは，

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABC}=1$$

これより，①は成立しないので，点 X は△ABC の外部にある。

そこで，△ABC の外部を，直線 AB, BC, CA を境界線として 6 つの領域に分ける。

まず，点 X が直線 BC について A と反対側，直線 CA について B と同じ側，直線 AB について C と同じ側にあるときを考えると，$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}-\triangle\mathrm{BCX}=\triangle\mathrm{ABC}$ より，

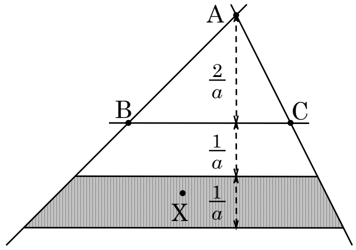


$$\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}bh_2-\frac{1}{2}ah_1=1$$

$$ch_3+bh_2=2+ah_1$$

②より，$4\leqq 2+2ah_1\leqq 6$ となり，$\dfrac{1}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{2}{a}$ ………③

一方，A から直線 BC に下ろした垂線の長さを h とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ から $\dfrac{1}{2}ah=1$ となり，$h=\dfrac{2}{a}$ ………④

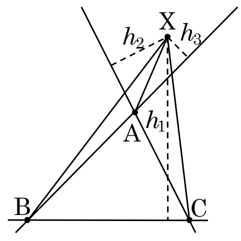


これより，点 X の存在範囲は，③④から右図の網点部となり，この領域の面積は，

$$\left\{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{7}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

次に，点 X が直線 BC について A と同じ側，直線 CA について B と反対側，直線 AB について C と反対側にあるときを考えると，

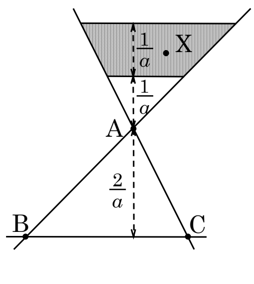
$\triangle\mathrm{BCX}-\triangle\mathrm{ABX}-\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABC}$ より，



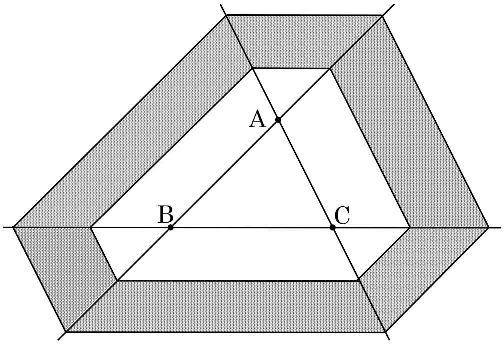
$$\frac{1}{2}ah_1-\frac{1}{2}ch_3-\frac{1}{2}bh_2=1,\ ch_3+bh_2=ah_1-2$$

②から $4\leqq 2ah_1-2\leqq 6$ となり，$\dfrac{3}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{4}{a}$ ………⑥

これより，点 X の存在範囲は，④⑥から右図の網点部となり，この領域の面積は，



$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$



そして，△ABC の外部の他の 4 つの領域についても同様なので，点 X の動きうる範囲は右図の網点部となる。

したがって，この X の動きうる範囲の面積は，⑤⑦より，

$$\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 3=\frac{15}{2}$$

［解　説］

平面図形の問題で，誘導のないタイプです。ただ，時間を気にしないときにはおもしろい内容ですが，限られた時間では厳しいものがあります。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$-1\leqq t\leqq 1$ において，$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$ ……①，$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$ ……②により定義される点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ がある。

ここで，$-1<t\leqq 1$ において，①②から，

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

これより，$\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する。

(2)　原点と P の距離を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=\sqrt{\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2}=\sqrt{(1+t)^2(1+t)+9(1+t)^2(1-t)}$$
$$=(1+t)\sqrt{(1+t)+9(1-t)}=\sqrt{2}\,(1+t)\sqrt{5-4t}$$
$$f'(t)=\sqrt{2}\left\{\sqrt{5-4t}-\frac{4(1+t)}{2\sqrt{5-4t}}\right\}=\sqrt{2}\cdot\frac{5-4t-2-2t}{\sqrt{5-4t}}=\frac{3\sqrt{2}\,(1-2t)}{\sqrt{5-4t}}$$

これより，$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

そして，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$ をとる。

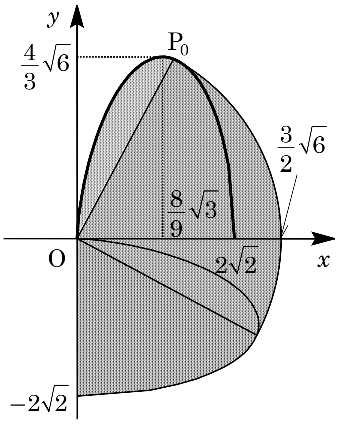
t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{6}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

(3)　$-1\leqq t\leqq 1$ において，①②より，

$$x'(t)=\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{1+t}$$
$$y'(t)=3\left\{\sqrt{1-t}-\frac{1+t}{2\sqrt{1-t}}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-2t-1-t}{\sqrt{1-t}}=\frac{3(1-3t)}{2\sqrt{1-t}}$$

すると，$x(t)$，$y(t)$ の増減は右表のようになり，P の軌跡 C の概形は右図の太線部である。なお，点 P_0 は，(2)で求めた $f(t)$ が最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$ をとるときの C 上の点とする。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$x'(t)$		$+$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{8}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{6}$	$\searrow$	0



そして，C と x 軸で囲まれた領域 D を，原点を中心として時計回りに $90°$ 回転させると，その通過領域は右図の網点部となり，その面積は，領域 D の面積に，半径 OP_0 の四分円の面積を加えたものになる。

そこで，領域 D の面積を S とおくと，

$$S=\int_0^{2\sqrt{2}}y\,dx=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2}+t\sqrt{1-t^2})\,dt$$

ここで，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\pi=\frac{\pi}{2}$，$\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0$ に注意すると，

$$S=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$$

また，半径 OP_0 の四分円の面積は $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{27}{8}\pi$ となる。

以上より，求める通過領域の面積は，$\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{8}\pi=\frac{45}{8}\pi$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。誘導が丁寧なので，(3)の結論への筋道は明快です。

4

問題のページへ

(1)　2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。そして，この k 個の整数の選び方すべてに対し，その積の和を $a_{n,k}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_{n,2} = 2^0 \cdot 2^1 + 2^0 \cdot 2^2 + \cdots + 2^0 \cdot 2^{n-1} + 2^1 \cdot 2^2 + \cdots + 2^1 \cdot 2^{n-1} + \cdots + 2^{n-2} \cdot 2^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})^2 - (2^0 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n-2})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} = \frac{1}{2}(2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1) - \frac{1}{6}(2^{2n} - 1)$$

$$= \frac{1}{3}(2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 2)$$

(2)　自然数 n に対し，$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$ ……①とすると，

$$f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + a_{n+1,2}x^2 + \cdots + a_{n+1,n}x^n + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \text{………②}$$

さて，$a_{n+1,k}$ は，2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1}，2^n から k 個を選んでそれらの積をとり，この選び方すべてに対する積の和であり，$2 \leqq k \leqq n$ のとき，

(i)　2^n を選ばないとき

2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から k 個を選んでそれらの積をとり，このとき選び方すべてに対する積の和は $a_{n,k}$ と表せる。

(ii)　2^n を選ぶとき

2^n 以外の 2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から $k-1$ 個を選んでそれらの積をとり，このとき選び方すべてに対する積の和は $2^n a_{n,k-1}$ と表せる。

(i)(ii)より，$a_{n+1,k} = a_{n,k} + 2^n a_{n,k-1}$　$(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$………③

なお，$k = 1$，$k = n+1$ のときは，

$$a_{n+1,1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = a_{n,1} + 2^n \text{………④}$$

$$a_{n+1,n+1} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n = 2^n a_{n,n} \text{………⑤}$$

そこで，③④⑤を②に代入すると，

$$f_{n+1}(x) = 1 + (a_{n,1} + 2^n)x + (a_{n,2} + 2^n a_{n,1})x^2 + (a_{n,3} + 2^n a_{n,2})x^3 + \cdots$$
$$+ (a_{n,n} + 2^n a_{n,n-1})x^n + 2^n a_{n,n}x^{n+1}$$
$$= f_n(x) + 2^n x(1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n)$$
$$= f_n(x) + 2^n x f_n(x) = (1 + 2^n x) f_n(x) \text{………⑥}$$

よって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x$ となる。

次に，$f_1(x) = 1 + a_{1,1}x = 1 + 2^0 x$ のもとで，$n \geqq 2$ のとき，⑥より，

$$f_n(x) = f_1(x)(1 + 2^1 x)(1 + 2^2 x)\cdots\cdots(1 + 2^{n-1}x)$$
$$= (1 + 2^0 x)(1 + 2^1 x)(1 + 2^2 x)\cdots\cdots(1 + 2^{n-1}x) \text{………⑦}$$

なお，⑦は $n = 1$ のときも成り立っている。

⑦より，$f_n(2x)=(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots\cdots(1+2^nx)$ となり，

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$$
$$=(1+2^0x)f_n(2x)=(1+x)f_n(2x)\cdots\cdots\cdots⑧$$

よって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ となる。

(3)　③より，$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑨$

また，①から，$f_n(2x)=1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots+2^na_{n,n}x^n$ となり，⑧の両辺の x^{k+1} の係数を比べると，

$$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩より，$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$ となり，

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑪$$

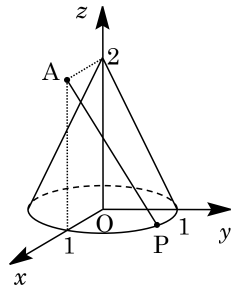
なお，⑤より，⑪は $k=n$ のときも成り立っている。

［解　説］

難度の高い整数と数列の融合問題です。(2)では，$a_{n,1}$，$a_{n,2}$，$a_{n,3}$，…と具体的に考えていき，二項係数の公式の導出法を参考にして，係数の漸化式を作る解き方をしました。ただ，出題の意図は，題意から⑦式をいきなり設定することにあるような気がします。なお，詰めの作業は面倒でした。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1) xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする内部を含む円錐 S を，平面 $z=1$ により切断したとき，その切り口は，中心 $(0,\ 0,\ 1)$ で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部または周上である。

また，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ に対し，θ を任意の実数として，円錐 S の底面上の点 P を，$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq r\leqq 1)$ とおく。このとき，線分 AP の通過する部分 T を，平面 $z=1$ により切断したときの切り口を考える。ここで，線分 AP と平面 $z=1$ との交点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 1)$ とおくと，点 P は線分 AQ を $2:1$ に外分する点なので，

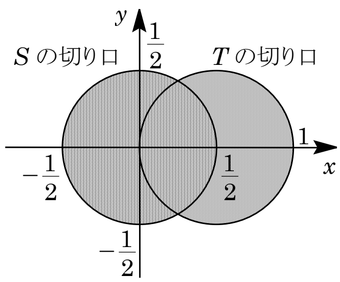
$$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)=(-1+2x,\ 2y,\ 0)$$

すると，点 Q の軌跡は，$(-1+2x)^2+(2y)^2=r^2$ かつ $z=1$ と表すことができ，$0\leqq r\leqq 1$ から $r^2\leqq 1$ となるので，

$$(-1+2x)^2+(2y)^2\leqq 1 \quad かつ \quad z=1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{1}{4} \quad かつ \quad z=1$$

以上より，平面 $z=1$ による S の切り口および T の切り口を $z=1$ 上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。



(2) (1)と同様に，平面 $z=k$ による S の切り口を動く点 P を $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ k)$ とし，線分 AP と平面 $z=t$ との交点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ t)$ とおく。ただし，$0\leqq k\leqq t\leqq 2$ である。

さて，平面 $z=k$ による S の切り口の円の半径 r_0 は，$(2-k):2=r_0:1$ より，$r_0=\dfrac{2-k}{2}$ となるので，$0\leqq r\leqq\dfrac{2-k}{2}$ である。

そして，点 P は線分 AQ を $(2-k):(t-k)$ に外分する点なので，

$$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ k)=\left(\frac{(2-k)x-(t-k)}{2-t},\ \frac{(2-k)y}{2-t},\ k\right)$$

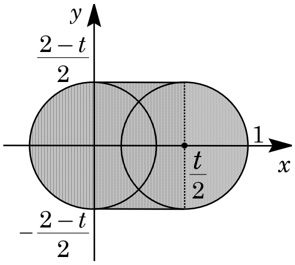
すると，点 Q の軌跡は，$\left\{\dfrac{(2-k)x-(t-k)}{2-t}\right\}^2+\left\{\dfrac{(2-k)y}{2-t}\right\}^2=r^2$ かつ $z=t$ と表すことができ，$0\leqq r\leqq\dfrac{2-k}{2}$ から $r^2\leqq\left(\dfrac{2-k}{2}\right)^2$ となるので，

$$\left\{\frac{(2-k)x-(t-k)}{2-t}\right\}^2+\left\{\frac{(2-k)y}{2-t}\right\}^2\leqq\left(\frac{2-k}{2}\right)^2 \quad かつ \quad z=t$$

$$\left(x-\frac{t-k}{2-k}\right)^2+y^2\leqq\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \quad かつ \quad z=t$$

これより，点 Q は平面 $z=t$ 上で，中心 $\left(\dfrac{t-k}{2-k},\ 0,\ t\right)$ で半径 $\dfrac{2-t}{2}$ の円の内部または周上を描くことになる。

ここで，t を $0\leqq t\leqq 2$ で固定し，k を $0\leqq k\leqq t$ で動かすと，$z=t$ 上の点 Q の軌跡である半径 $\dfrac{2-t}{2}$ の円は，その中心が $\left(\dfrac{t}{2},\ 0,\ t\right)$ から $(0,\ 0,\ t)$ に動くので，その通過領域は右図の網点部となる。そして，この網点部の面積は，



$$\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}\cdot\frac{2-t}{2}\cdot 2=\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{1}{2}t(2-t)$$

したがって，点 P が S を動くとき線分 AP が通過する部分の体積 V は，

$$V=\int_0^2\left\{\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{1}{2}t(2-t)\right\}dt=-\frac{\pi}{4}\left[\frac{(2-t)^3}{3}\right]_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

［解　説］

立体の体積を求める東大で頻出の問題です。(2)は，(1)の誘導を利用するのでしょうが，上の解答例では，重複をいとわず，少し丁寧に記述してみました。なお，A，P，Q の位置関係を内分ではなく，外分で処理したのは，計算量を減少させるためです。

6

問題のページへ

(1)　θ の方程式 $A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$ ……①に対して，①の左辺を $f(\theta)$ とおくと，

$$f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

すると，$A>1$ のとき，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\ f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right)<0$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=A-\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)>0,\ f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\alpha\right)<0$$

$f(\theta)$ は連続関数なので，①は，区間 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$，$\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$ に，それぞれ少なくとも 1 個の解をもつ。

また，$f(0)=f(2\pi)=-\sin\alpha$ より，

(i)　$\sin\alpha\geqq 0$ のとき

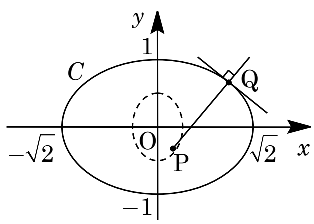
$f(0)\leqq 0$ より，①は，区間 $0\leqq\theta<\frac{\pi}{4}$ に少なくとも 1 個の解をもつ。

(ii)　$\sin\alpha<0$ のとき

$f(2\pi)>0$ より，①は，区間 $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$ に少なくとも 1 個の解をもつ。

(i)(ii)より，①は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつ。

(2)　楕円 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上の点 Q を，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，Q における C の接線の方程式は，



$$\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

この接線の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$ は，

$$\overrightarrow{n_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\ \sin\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta)$$

すると，Q における C の法線の法線ベクトル $\overrightarrow{n_2}$ は，$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2}\sin\theta,\ -\cos\theta)$ とおけるので，法線の方程式は，$\sqrt{2}\sin\theta(x-\sqrt{2}\cos\theta)-\cos\theta(y-\sin\theta)=0$ から，

$$\sqrt{2}x\sin\theta-y\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0,\ \sin 2\theta-2\sqrt{2}x\sin\theta+2y\cos\theta=0$$

ここで，この法線が，点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ $(2u^2+v^2<r^2)$ を通るとすると，

$$\sin 2\theta-2\sqrt{2}u\sin\theta+2v\cos\theta=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$(u,\ v)=(0,\ 0)$ のとき

②は $\sin 2\theta=0$ となり，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に 4 個の解をもつ。

(ii)　$(u,\ v)\neq(0,\ 0)$ のとき

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}u}{\sqrt{2u^2+v^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{-v}{\sqrt{2u^2+v^2}}$ とおくと，②は，

$$\sin 2\theta-2\sqrt{2u^2+v^2}\sin(\theta+\alpha)=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2u^2+v^2}}\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$(u,\ v)\neq(0,\ 0)$ は，$2u^2+v^2<r^2\ (0<r<1)$ を満たす任意の実数なので，

$$\frac{1}{2\sqrt{2u^2+v^2}}>\frac{1}{2r}$$

すると，$0<r\leqq\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{2\sqrt{2u^2+v^2}}>1$ となり，このとき(1)から，③は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつ。

(i)(ii)より，$0<r\leqq\frac{1}{2}$ のとき，任意の $(u,\ v)$ に対し，②の解は少なくとも 4 個ある。

よって，$\mathrm{P}(u,\ v)$ が領域 $D: 2x^2+y^2<r^2\ \left(0<r\leqq\frac{1}{2}\right)$ 内の任意の点であるとき，条件を満たす点 Q は少なくとも 4 個存在し，条件を満たす r は存在する。

さて，$r>\frac{1}{2}$ のときについては，$2u^2+v^2=\frac{1}{4}$ となるある $(u,\ v)$ に対し，③は，

$$\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ のときを考えると，④は $\sin 2\theta-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0 \cdots\cdots ⑤$ となり，

$$2\cos\frac{1}{2}\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \ 2\cos\frac{12\theta+\pi}{8}\sin\frac{4\theta-\pi}{8}=0$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\frac{\pi}{8}\leqq\frac{12\theta+\pi}{8}<\frac{25}{8}\pi$，$-\frac{\pi}{8}\leqq\frac{4\theta-\pi}{8}<\frac{7}{8}\pi$ となり，

$$\frac{12\theta+\pi}{8}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\ \ \text{または}\ \ \frac{4\theta-\pi}{8}=0$$

よって，$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$ となるので，⑤の解は 3 個しか存在しない。

すると，$r>\frac{1}{2}$ のときは条件を満たさないことより，r の最大値は $\frac{1}{2}$ である。

［解 説］

楕円を題材にした図形問題です。(1)を誘導と考えると，(2)で点 Q を媒介変数表示するという方針が立ちます。なお，解答例では省きましたが，(1)や(2)の後半では，2 つのグラフ $y=A\sin 2\theta$，$y=\sin(\theta+\alpha)$ を書いて「あたり」をつけています。