1　解答解説のページへ

$a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線 $C: y=x^3-3ax^2+b$ が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1 : C は x 軸に接する。

条件 2 : x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に 8 本の直線 $x=a$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $y=b$ $(b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ がある。以下, 16 個の点 $(a,\ b)$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
上の 8 本の直線のうち, 選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
上の 8 本の直線は, いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面において，放物線 $y=x^2-2x+4$ のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1)　点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2)　実数 a に対して，直線 $l: y=ax$ を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n, k を, $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数 2^m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3}=2^0\cdot2^1\cdot2^2+2^0\cdot2^1\cdot2^3+2^0\cdot2^2\cdot2^3+2^1\cdot2^2\cdot2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し, $a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し, x についての整式

$$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

1

問題のページへ

曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + b\ (a > 0,\ b > 0)$ ……①に対して，

$$y' = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-4a^3 + b$	$\nearrow$

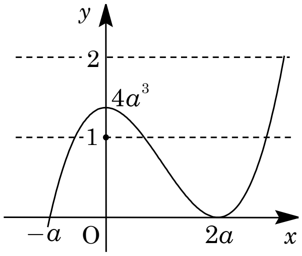
すると，y の増減は右表のようになり，$b > 0$ に注意すると，条件 1 から，

$$-4a^3 + b = 0,\ b = 4a^3 \text{ ………②}$$

①②から，$C: y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ ……③となり，

$$y = (x + a)(x - 2a)^2$$

これより，C の概形は右図のようになる。



ここで，x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）を R とおくと，R の範囲は $0 < y < 4a^3$ である。

さて，条件 2 から，R に格子点が含まれるためには $1 < 4a^3$，しかも 1 個だけということから $4a^3 \leqq 2$ が必要になる。まとめると，$1 < 4a^3 \leqq 2$ であることが必要となり，

$$\frac{1}{4} < a^3 \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ ………④}$$

このとき，R には格子点 $(0,\ 1)$ が含まれ，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，④が成り立つとき $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，これより領域 R の範囲は，

$$-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < -a < x < 2a < \sqrt{3} < 2$$

そこで，④のもとで，R に含まれる格子点が $(0,\ 1)$ だけかどうかを判断するために，以下，直線 $x = 1$ 上の格子点 $(1,\ 1)$ と R の関係を調べてみる。

ここで，③の右辺を $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ とおくと，

$$f(1) - 1 = (1 - 3a + 4a^3) - 1 = 4a^3 - 3a = a(2a + \sqrt{3})(2a - \sqrt{3}) < 0$$

よって，$f(1) < 1$ から格子点 $(1,\ 1)$ は R に含まれない。

以上より，求める条件は④となり，a の範囲は $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ である。

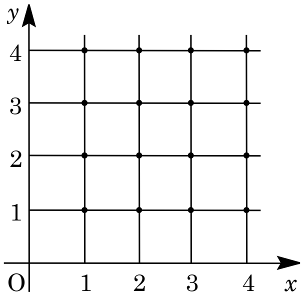
［解　説］

3 次曲線を題材とし，格子点を絡ませた問題です。必要条件④を求めた後の解法はいろいろ考えられますが，ここでは R の範囲から $x = 1$ 上の格子点に絞って調べ，十分性を確認しています。記述しにくい問題です。

2

問題のページへ

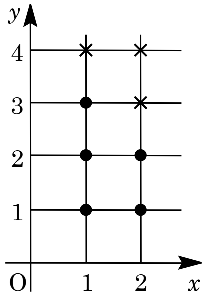
(1)　8 本の直線 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$，$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対し，それらの交点の 16 個の点から異なる 5 個の点を選ぶとき，選んだ点を 1 個も含まない直線が 2 本あるという場合を調べると，



(i)　$x=a_1$，a_2 は点を含まず，$y=b$ はすべて含むとき

まず，a_1，a_2 の選び方は ${}_4C_2=6$ 通りである。

ここで，たとえば $x=3,\ 4$ が選んだ点を含まないときについては，$x=1,\ 2$ 上の 8 個の点から 5 個を選び(${}_8C_5=56$ 通り)，その中から選んだ点を含んでいない直線 $y=b$ (右図では $y=4$)が存在する場合を除くと考える。



そして，$y=b$ の選び方が ${}_4C_1=4$ 通り，この直線上を除く残り 6 個の点から 5 個の点を選ぶ方法は「選ばない 1 個の点を選ぶ」と考えて ${}_6C_1=6$ 通り(右図では $y=4$ 上の $(1,\ 4)$，$(2,\ 4)$ 以外に選ばない点がもう 1 個)となる。

したがって，この場合の 5 点の選び方は，$6\times(56-4\times6)=192$ 通りである。

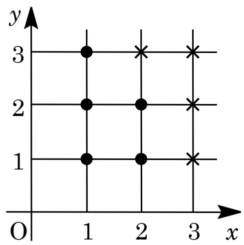
(ii)　$x=a$ は点をすべて含み，$y=b_1$，b_2 は含まないとき

(i)と同様に考えると，192 通りの場合がある。

(iii)　$x=a_1$ と $y=b_1$ は点を含まず，それ以外の直線はすべて含むとき

まず，a_1，b_1 の選び方は ${}_4C_1\times{}_4C_1=16$ 通りである。

ここで，たとえば $x=4$ と $y=4$ が選んだ点を含まないときについては，$x=1,\ 2,\ 3$ と $y=1,\ 2,\ 3$ との 9 個の交点から 5 個を選び(${}_9C_5=126$ 通り)，その中から選んだ点を含んでいない直線 $x=a$ または $y=b$ (右図では $x=3$)が存在する場合を除くと考える。



そして，この 1 本の選び方が ${}_6C_1=6$ 通り，この直線上を除く残り 6 個の点から 5 個の点を選ぶ方法は「選ばない 1 個の点を選ぶ」と考えて ${}_6C_1=6$ 通り(右図では $x=3$ 上の $(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(3,\ 3)$ 以外に選ばない点がもう 1 個)となる。

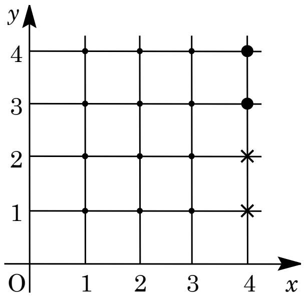
したがって，この場合の 5 点の選び方は，$16\times(126-6\times6)=1440$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める選び方は，$192+192+1440=1824$ 通りである。

(2)　(1)と同様に 16 個の点から異なる 5 個の点を選ぶとき，すべての直線がいずれも選んだ点を少なくとも 1 個含むという場合は，直線 $x=a$ については，1 本だけが 2 点を含み，他の 3 本は 1 点を含むことが必要になる。

まず，2 点を含む直線の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通りである。

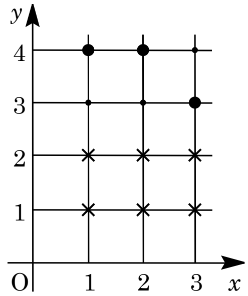
ここで，たとえば直線 $x = 4$ が 2 点を含むときを考えると，$x = 4$ 上の 2 点の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りとなる。右図では，その 2 点が $(4,\ 3)$ と $(4,\ 4)$ の場合を示している。



一方，1 点ずつ含む直線 $x = 1$，$x = 2$，$x = 3$ 上の点の選び方の総数は $4\times4\times4 = 64$ 通りであるが，このうち条件を満たさない以下の 2 つの場合を除くと考える。

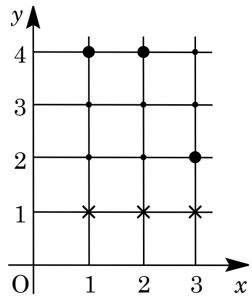
(i)　直線 $y = b_1$，b_2 は点を含んでいないとき

b_1，b_2 の選び方(右図では $y = 1$ と $y = 2$)は 1 通りで，この直線を除いた直線 $y = b$ (右図では $y = 3$ または $y = 4$)上にある点の選び方は，$y = 3$ 上だけ，$y = 4$ 上だけの場合も含めて数えると，$2\times2\times2 = 8$ 通りである。



(ii)　直線 $y = b_1$ だけが点を含んでいないとき

b_1 の選び方(右図では $y = 1$)は 2 通りで，この直線を除いた直線 $y = b$ (右図では $y = 2$ または $y = 3$ または $y = 4$)上にある点の選び方は，(i)の場合を除いて $3\times3\times3 - 2\times2\times2 = 19$ 通りである。



(i)(ii)より，直線 $x = 1$，$x = 2$，$x = 3$ 上の点の選び方は，

$$64 - (1\times8 + 2\times19) = 18 \quad (\text{通り})$$

以上より，求める選び方は，$4\times6\times18 = 432$ 通りである。

［解　説］

場合の数の問題ですが，かなり複雑です。2 つの設問とも，具体例を考えて数え上げています。なお，最初，(1)を利用して(2)に繋ぐことを考えましたが，数値が大きくなるので，途中でその方針を変更しました。

3

問題のページへ

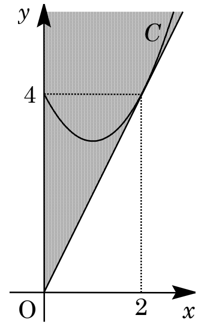
(1)　放物線 $C : y = x^2 - 2x + 4\ (x \geqq 0)$ ……①上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2 - 2p + 4)$ における接線の方程式は，$y' = 2x - 2$ より，

$$y - (p^2 - 2p + 4) = (2p - 2)(x - p)$$

$$y = (2p - 2)x - p^2 + 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

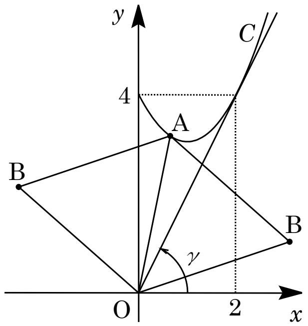
②が原点 O を通るときは，$-p^2 + 4 = 0$ かつ $p \geqq 0$ より $p = 2$ となり，このとき接線は $y = 2x$ である。

すると，点 P が C 上を動くとき半直線 OP が通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　C 上の点 A，直線 $l : y = ax$ 上の点 B に対して，半直線 OA, OB と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とする。また，直線 $y = 2x$ と x 軸の正の向きとのなす角を γ とすると，$\tan\gamma = 2 > \sqrt{3}$ から $\dfrac{\pi}{3} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ となり，

また(1)から $\gamma \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ……③である。



さて，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるとき，

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ④,\quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③④より $\gamma + \dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ となり，

$$\tan\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \leqq \tan\beta \leqq \tan\frac{5}{6}\pi \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，③⑤より $\gamma - \dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\tan\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \leqq \tan\beta \leqq \tan\frac{\pi}{6} \cdots\cdots\cdots ⑦$$

ここで，加法定理を利用すると，

$$\tan\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} = -\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11},\quad \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11}$$

すると，$\tan\beta = a$ から，条件を満たす a の範囲は，⑥⑦より，

$$-\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

［解　説］

(1)は通過領域の図示，(2)は(1)の結果とゆるく関係している図形問題の組合せです。なお，(1)では，半直線の始点が固定されていることから，直感的に解いています。

4

問題のページへ

(1)　2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。そして，この k 個の整数の選び方すべてに対し，その積の和を $a_{n,k}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_{n,2} &= 2^0\cdot 2^1 + 2^0\cdot 2^2 + \cdots + 2^0\cdot 2^{n-1} + 2^1\cdot 2^2 + \cdots + 2^1\cdot 2^{n-1} + \cdots + 2^{n-2}\cdot 2^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\{(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})^2 - (2^0+2^2+2^4+\cdots+2^{2n-2})\}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2^n-1}{2-1}\Big)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} = \frac{1}{2}(2^{2n}-2\cdot 2^n+1) - \frac{1}{6}(2^{2n}-1)\\ &= \frac{1}{3}(2^{2n}-3\cdot 2^n+2)\end{aligned}$$

(2)　自然数 n に対し，$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$ ……①とすると，

$$f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + a_{n+1,2}x^2 + \cdots + a_{n+1,n}x^n + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$a_{n+1,k}$ は，2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1}，2^n から k 個を選んでそれらの積をとり，この選び方すべてに対する積の和であり，$2 \leqq k \leqq n$ のとき，

(i)　2^n を選ばないとき

2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から k 個を選んでそれらの積をとり，このとき選び方すべてに対する積の和は $a_{n,k}$ と表せる。

(ii)　2^n を選ぶとき

2^n 以外の 2^0，2^1，2^2，…，2^{n-1} から $k-1$ 個を選んでそれらの積をとり，このとき選び方すべてに対する積の和は $2^n a_{n,k-1}$ と表せる。

(i)(ii)より，$a_{n+1,k} = a_{n,k} + 2^n a_{n,k-1}$　$(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ ………③

なお，$k=1$，$k=n+1$ のときは，

$$a_{n+1,1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = a_{n,1} + 2^n \cdots\cdots\cdots④$$

$$a_{n+1,n+1} = 2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}\cdot 2^n = 2^n a_{n,n} \cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，③④⑤を②に代入すると，

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= 1 + (a_{n,1}+2^n)x + (a_{n,2}+2^n a_{n,1})x^2 + (a_{n,3}+2^n a_{n,2})x^3 + \cdots\\ &\quad + (a_{n,n}+2^n a_{n,n-1})x^n + 2^n a_{n,n}x^{n+1}\\ &= f_n(x) + 2^n x(1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n)\\ &= f_n(x) + 2^n x f_n(x) = (1+2^n x)f_n(x) \cdots\cdots\cdots⑥\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x$ となる。

次に，$f_1(x) = 1 + a_{1,1}x = 1 + 2^0 x$ のもとで，$n \geqq 2$ のとき，⑥より，

$$\begin{aligned}f_n(x) &= f_1(x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x)\\ &= (1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdot\cdots\cdot(1+2^{n-1}x) \cdots\cdots\cdots⑦\end{aligned}$$

なお，⑦は $n=1$ のときも成り立っている。

⑦より，$f_n(2x)=(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots\cdots(1+2^nx)$ となり，

$$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$$
$$=(1+2^0x)f_n(2x)=(1+x)f_n(2x)\cdots\cdots\cdots⑧$$

よって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ となる。

(3)　③より，$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑨$

また，①から，$f_n(2x)=1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots+2^na_{n,n}x^n$ となり，⑧の両辺の x^{k+1} の係数を比べると，

$$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩より，$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$ となり，

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots⑪$$

なお，⑤より，⑪は $k=n$ のときも成り立っている。

［解　説］

難度の高い整数と数列の融合問題です。(2)では，$a_{n,1}$，$a_{n,2}$，$a_{n,3}$，…と具体的に考えていき，二項係数の公式の導出法を参考にして，係数の漸化式を作る解き方をしました。ただ，出題の意図は，題意から⑦式をいきなり設定することにあるような気がします。なお，詰めの作業は面倒でした。