1

解答解説のページへ

座標平面の原点を O とし，O，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ 1)$，C$(0,\ 1)$を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点P$(p,\ 0)$，Q$(0,\ q)$，R$(r,\ 1)$はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が$\dfrac{1}{3}$の三角形の 3 頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値, 最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

O を原点とする座標平面において，点 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が次の 2 つの条件を満たしながら動く。

条件 1：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2：点 O と直線 l の距離を c とし，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき, P が動く領域を D とする。さらに, x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1) D を図示し，その面積を求めよ。

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する。

(1)　事象 S が起こる確率を求めよ。

(2)　事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

$\boxed{4}$

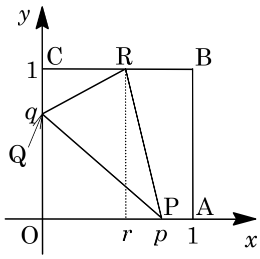
解答解説のページへ

O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a，b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

1　　　　問題のページへ



(1)　3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q)$，$\mathrm{R}(r,\ 1)$ に対して，$0<p\leqq 1$，$0<q\leqq 1$，$0\leqq r\leqq 1$ とし，まず $\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{3}$ から，

$$\frac{1}{2}pq=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3p}\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{3}$ から，四角形 OPRQ の面積が $\dfrac{2}{3}$ となるので，$\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\dfrac{1}{2}(1-q)r=\dfrac{2}{3}$ から，

$$p+r-r+qr=\frac{4}{3},\ p+qr=\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①②から $p+\dfrac{2r}{3p}=\dfrac{4}{3}$ となり，$3p^2+2r=4p$ より，$r=\dfrac{1}{2}p(4-3p)\cdots\cdots\cdots③$

ここで，①から $0<\dfrac{2}{3p}\leqq 1$ となり，$0<p\leqq 1$ のもとで，$p\geqq\dfrac{2}{3}\cdots\cdots\cdots④$

同様に，③から，$0\leqq\dfrac{1}{2}p(4-3p)\leqq 1$ となり，$0<p\leqq 1$ のもとで，

$$p(4-3p)\leqq 2,\ 3p^2-4p+2\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤はつねに成立するので，p のとりうる値の範囲は④から，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1\cdots\cdots\cdots⑥$

このとき，⑥から $1\leqq\dfrac{1}{p}\leqq\dfrac{3}{2}$ となるので，①より，$\dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1$

また，③から，$r=2p-\dfrac{3}{2}p^2=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$ となり，⑥より，

$$2-\frac{3}{2}\leqq r\leqq\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{2}{3}$$

(2)　①③より，$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{r}{q}=\dfrac{1}{2}p(4-3p)\cdot\dfrac{3p}{2}=\dfrac{3}{4}p^2(4-3p)$

ここで，$f(p)=p^2(4-3p)=-3p^3+4p^2$ とおくと，$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}f(p)$ となり，

$$f'(p)=-9p^2+8p=-p(9p-8)$$

すると，⑥における $f(p)$ の増減は右表のようになり，$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{256}{243}=\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{2}{3}$ となる。

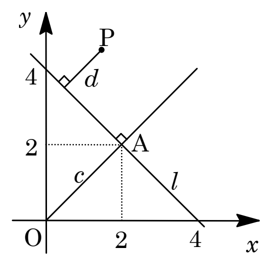
p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$	$\frac{256}{243}$	$\searrow$	1

［解　説］

図形量の最大・最小に関する標準的な問題です。誘導が丁寧なうえ，計算も穏やかです。

２

問題のページへ



(1)　点$\mathrm{A}(2,\ 2)$，$\mathrm{P}(p,\ q)$に対し，$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$なので，

$$8 \leqq 2p+2q \leqq 17,\ 4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2} \cdots\cdots\cdots①$$

また，点Aを通り線分OAと垂直な直線lは，$x+y=4$と表せるので，Oとlの距離をc，Pとlの距離をdとすると，

$$c=\mathrm{OA}=2\sqrt{2},\ d=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{2}}$$

すると，$cd \geqq (p-1)^2$から，$2\sqrt{2}\cdot\dfrac{|p+q-4|}{\sqrt{2}} \geqq (p-1)^2$となり，①から，

$$2(p+q-4) \geqq (p-1)^2 \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$2p+2q-8 \geqq p^2-2p+1$となり，$2q \geqq p^2-4p+9=(p-2)^2+5$

$$q \geqq \frac{1}{2}(p-2)^2+\frac{5}{2} \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①の表す領域の境界線を$p+q=4 \cdots\cdots④$，$p+q=\dfrac{17}{2} \cdots\cdots⑤$とおき，②の表す領域の境界線$2(p+q-4)=(p-1)^2 \cdots\cdots⑥$との関係を調べる。

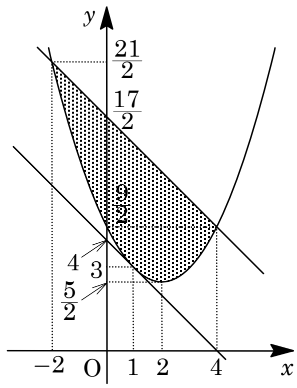
まず，④⑥から$0=(p-1)^2$となり，$p=1$

また，⑤⑥から$17-8=(p-1)^2$となり，$p-1=\pm 3$

$$p=4,\ -2$$

以上より，①かつ②すなわち①かつ③で表される点$\mathrm{P}(p,\ q)$の動く領域Dは，

$$4 \leqq x+y \leqq \frac{17}{2},\ y \geqq \frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{5}{2}$$



これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，領域Dの面積Sは，

$$S=\int_{-2}^{4}\left\{-x+\frac{17}{2}-\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{5}{2}\right\}dx=\int_{-2}^{4}-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(4+2)^3=18$$

(2)　まず，Dの境界線$y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{5}{2}\ (-2 \leqq x \leqq 4)$が，原点を通る直線$y=kx$（$k$は実数）と共有点をもつ$k$の値の範囲を求めるために，両式を連立すると，

$$\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{5}{2}=kx,\ x^2-2(k+2)x+9=0 \cdots\cdots\cdots⑦$$

そこで，$D/4=(k+2)^2-9 \geqq 0$とすると，

$$(k+2+3)(k+2-3) \geqq 0,\ (k+5)(k-1) \geqq 0$$

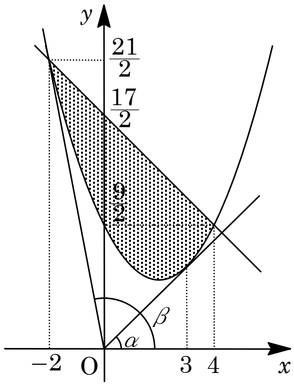
よって，$k \leqq -5,\ 1 \leqq k$となる。

ここで，$k=-5$ のとき，⑦から $x=k+2=-3$ となり $-2\leqq x\leqq 4$ を満たさない。

また，$k=1$ のとき，⑦から $x=k+2=3$ となり $-2\leqq x\leqq 4$ を満たす。

すると，$y=kx$ が点 $\left(-2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通るとき $k=-\dfrac{21}{4}$ なので，求める k の値の範囲は，

$$k\leqq-\frac{21}{4},\ 1\leqq k$$



さて，D 上を動く点 P に対し，線分 OP と x 軸の正の部分のなす角 θ は，右図のように α，β を設定とすると，

$$\alpha\leqq\theta\leqq\beta$$

ただし，$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=-\dfrac{21}{4}$ である。

ここで，$\tan\alpha=1$ のとき，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ から $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また，$\tan\beta=-\dfrac{21}{4}$ のとき，$\dfrac{1}{\cos^2\beta}=1+\left(-\dfrac{21}{4}\right)^2=\dfrac{457}{16}$ となり，

$$\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{457}}$$

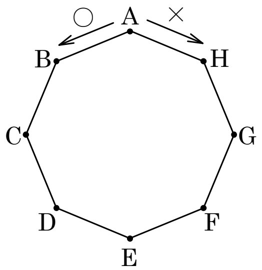
以上より，$\cos\theta$ のとりうる値の範囲は，$\cos\beta\leqq\cos\theta\leqq\cos\alpha$ から，

$$-\frac{4}{\sqrt{457}}\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

［解 説］

領域についての標準的な問題で，計算に配慮が感じられる設定となっています。D の概形を正確に描くところがポイントです。

3　　問題のページへ



(1)　正八角形 ABCDEFGH に対し，点 P は最初に頂点 A にある。そして，この点 P について，確率$\dfrac{1}{2}$で反時計回りに隣接する頂点に移動(○で表す)，確率$\dfrac{1}{2}$で時計回りに隣接する頂点に移動(×で表す)という操作を 10 回繰り返す。

この後に，点 P が頂点 A にあるのは，○が x 回，×が y 回とすると，$x+y=10$ で，

$x-y=0$ または $x-y=\pm 8$

すなわち，$(x,\ y)=(5,\ 5)$，$(9,\ 1)$，$(1,\ 9)$ である。

(i)　$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき　このときの確率は，$\dfrac{{}_{10}C_5}{2^{10}}=\dfrac{252}{2^{10}}=\dfrac{63}{2^8}$

(ii)　$(x,\ y)=(9,\ 1)$ のとき　このときの確率は，$\dfrac{{}_{10}C_9}{2^{10}}=\dfrac{10}{2^{10}}=\dfrac{5}{2^9}$

(iii)　$(x,\ y)=(1,\ 9)$ のとき　このときの確率は，$\dfrac{{}_{10}C_1}{2^{10}}=\dfrac{10}{2^{10}}=\dfrac{5}{2^9}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{63}{2^8}+\dfrac{5}{2^9}+\dfrac{5}{2^9}=\dfrac{68}{2^8}=\dfrac{17}{64}$ である。

(2)　操作を 10 回行った後に点 P が頂点 A にあり，しかも 10 回目までの操作によって，点 P が少なくとも 1 回，頂点 F に移動する事象を考える。まず，初めて点 F に移動するのが，3 以上の奇数回目となるのに注意し，△で○または×を表すとする。

(i)　$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき

(i-i)　2 回目が G で，3 回目で初めて F に移動

×××△△△△△△△

△△△△△△△は，○が 5 回で×が 2 回であり，このとき ${}_7C_5=21$ 通りある。

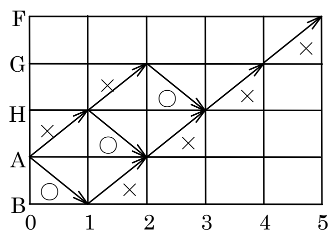
(i-ii)　4 回目が E で，5 回目で初めて F に移動

○○○○○△△△△△

△△△△△は，×が 5 回であり，このとき 1 通りとなる。

(i-iii)　4 回目が G で，5 回目で初めて F に移動

右図より，次の 3 つの場合がある。



○××××△△△△△

×○×××△△△△△

××○××△△△△△

△△△△△は，○が 4 回で×が 1 回であり，このとき ${}_5C_4=5$ 通りずつなので，

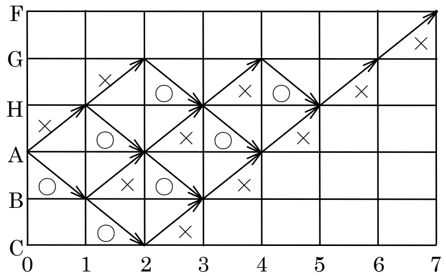
$3\times 5=15$（通り）

(i-iv)　6 回目が E で，7 回目で初めて F に移動

7 回目までに，○が 6 回で×が 1 回となり，不適である。

(i-v)　6 回目が G で，7 回目で初めて F に移動

右図より，次の 9 つの場合がある。



○○××××××△△△

○×○×××××△△△

○××○××××△△△

○×××○×××△△△

×○○×××××△△△

×○×○××××△△△

×○××○×××△△△

××○○××××△△△

××○×○×××△△△

△△△は，○が 3 回であり，このとき 1 通りずつなので，

$9\times1=9$（通り）

(i-vi)　8 回目が E で，9 回目で初めて F に移動

9 回目までに，○が 7 回で×が 2 回となり，不適である。

(i-vii)　8 回目が G で，9 回目で初めて F に移動

9 回目までに，○が 3 回で×が 6 回となり，不適である。

(ii)　$(x,\ y)=(9,\ 1)$ のとき

10 回目までに，反時計回りに 1 回転しているので，点 F に移動している。

(iii)　$(x,\ y)=(1,\ 9)$ のとき

10 回目までに，時計回りに 1 回転しているので，点 F に移動している。

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{21+1+15+9}{2^{10}}+\frac{5}{2^9}+\frac{5}{2^9}=\frac{23}{2^9}+\frac{10}{2^9}=\frac{33}{512}$$

［解　説］

丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。(2)では，まず余事象と考えましたが，(ii)と(iii)の場合がともに条件に適することより，方針転換をして場合分けで処理しています。なお，数えもれや重複を防ぐために図を描きましたが，これを見ると，方針転換しなかった方がよかったという思いも……。

4

問題のページへ

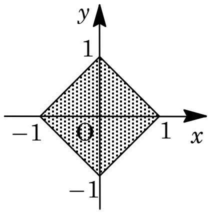
(1)　不等式 $|x|+|y| \leqq 1$ が表す領域 D を，x, y の符号で場合分けをして表すと，

(i)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ のとき　$x+y \leqq 1$ より，$y \leqq -x+1$

(ii)　$x < 0$, $y \geqq 0$ のとき　$-x+y \leqq 1$ より，$y \leqq x+1$

(iii)　$x < 0$, $y < 0$ のとき　$-x-y \leqq 1$ より，$y \geqq -x-1$

(iv)　$x \geqq 0$, $y < 0$ のとき　$x-y \leqq 1$ より，$y \geqq x-1$



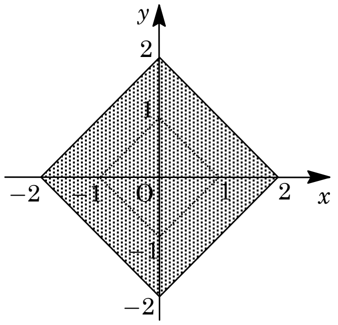
(i)〜(iv)より，D は右図の網点部であり，境界は領域に含む。

次に，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

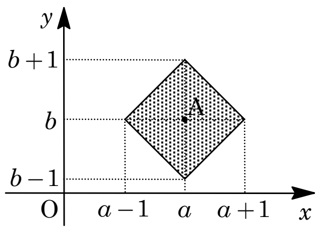
ここで，$-\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ とおくと，対称性から点 Q′ は領域 D を動き，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

そこで，まず点 P を D 上で固定すると，点 R は，点 P を中心に領域 D を平行移動した正方形の内部または辺上を動く。



次に，この状態を保ったまま点 P を D 上で動かすと，点 R の動く範囲 E は，点 P を中心とする正方形の通過領域となり，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

(2)　不等式 $|x-a|+|y-b| \leqq 1$ の表す領域 F を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ b)$ とおき，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと，点 P, Q は領域 D を動く。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = (\overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) - (\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{AS}} - \overrightarrow{\mathrm{AT}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

よって，点 U が動く範囲 G は，点 R の動く範囲 E と一致する。

［解 説］

過去に幾度も出されていますが，任意に動く 2 点に対して，1 つの点をいったん固定して軌跡や領域を考えるという問題です。(2)は領域の絡んだ論証で，いろいろな書き方が考えられますが，上の解答例はその 1 例です。