1

解答解説のページへ

座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2-3x+4$ で定める。原点を通る 2 直線 l, m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy \leqq 0$ が成り立つ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

数列a_1，a_2，$\cdots$を，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$で定める。

(1)　a_7と1の大小を調べよ。

(2)　$n\geqq 2$とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$を満たすnの範囲を求めよ。

(3)　a_nが整数となる$n\geqq 1$をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1) $x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

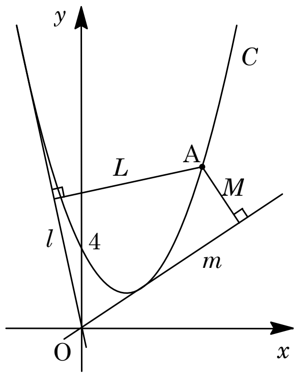
放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

(1)　点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。

①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0\,,\ a+3=\pm 4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$，$m: y=x$ とおく。

ここで，C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し，A と l, m の距離をそれぞれ L, M とすると，

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(|t+2|+\sqrt{5}|t-2|)$$

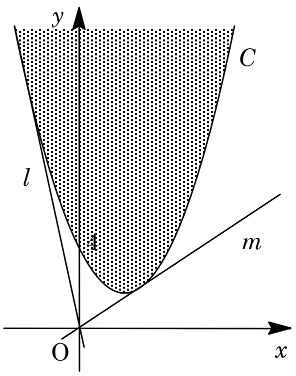
ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$ とおくと，

(i)　$t\geqq 2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt{5}(t-2)=(1+\sqrt{5})t+2-2\sqrt{5}$

(ii)　$-2\leqq t<2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt{5}(t-2)=(1-\sqrt{5})t+2+2\sqrt{5}$

(iii)　$t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt{5}(t-2)=(-1-\sqrt{5})t-2+2\sqrt{5}$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。



(2)　領域 $D: y\geqq x^2-3x+4$ は右図の網点部のようになる。

そこで，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq 0$ ……③が成り立つ条件は，

(a)　$q=0$ のとき　③は $px\leqq 0$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$p=0$ である。

(b)　$q>0$ のとき　③は $y\leqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する場合はない。

(c)　$q<0$ のとき　③は $y\geqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，l, m の傾きから，

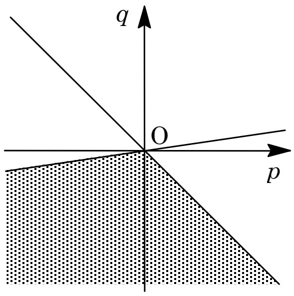
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1,\ \ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$ かつ $q \leqq -p$ である。

以上より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲は,

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{ かつ } q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}$ に対して，

$$a_7 = \frac{{}_{14}\mathrm{P}_7}{(7!)^2} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7^2\cdot6^2\cdot5^2\cdot4^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot1^2} = \frac{13\cdot11}{7\cdot5\cdot3\cdot2} = \frac{143}{210} < 1$$

(2)　$n \geqq 2$ において，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2}{{}_{2n-2}\mathrm{P}_{n-1}} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}{(2n-2)(2n-3)\cdots(n+1)n}$$
$$= \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ とすると，$4n-2 < n^2$ から，$n^2-4n+2>0$

$n \geqq 2$ より $n > 2+\sqrt{2}$ となり，求める n の範囲は 4 以上の整数である。

(3)　(2)から，$n \geqq 4$ のとき $a_n < a_{n-1}$ となり，$a_3 > a_4 > a_5 > \cdots$ である。

さて，(1)から $a_7 < 1$ に注意すると，$1 > a_7 > a_8 > a_9 > \cdots > 0$ となり，

$$a_1 = \frac{{}_{2}\mathrm{P}_1}{(1!)^2} = 2,\ a_2 = \frac{{}_{4}\mathrm{P}_2}{(2!)^2} = 3,\ a_3 = \frac{{}_{6}\mathrm{P}_3}{(3!)^2} = \frac{10}{3},\ a_4 = \frac{{}_{8}\mathrm{P}_4}{(4!)^2} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{{}_{10}\mathrm{P}_5}{(5!)^2} = \frac{21}{10},\ a_6 = \frac{{}_{12}\mathrm{P}_6}{(6!)^2} = \frac{77}{60}$$

よって，a_n が整数となるのは，$n=1,\ 2$ である。

［解　説］

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導が丁寧なので，方針の混乱はないでしょう。

$\boxed{3}$

問題のページへ

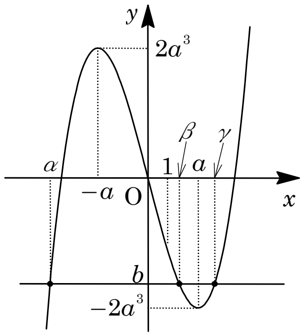
(1)　$f(x)=x^3-3a^2x\quad(a>0)$に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

　これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

　すると，$x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加する条件は，$0<a\leqq 1$である。

(2)　方程式$f(x)=b$は相異なる3実数解をもち，その解を$\alpha<\beta<\gamma$とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$であり，しかも$\beta>1$である条件は，右図から，



$$a>1\cdots\cdots\cdots①$$
$$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2\cdots\cdots\cdots②$$

　ここで，②の 2 つの境界線$b=-2a^3$と$b=1-3a^2$の関係は，両式を連立すると，

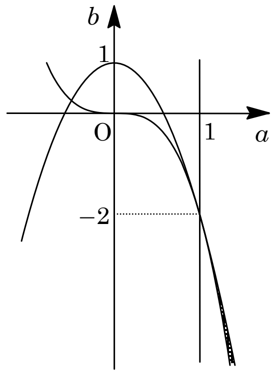
$$-2a^3=1-3a^2,\ 2a^3-3a^2+1=0$$
$$(2a+1)(a-1)^2=0$$

　よって，$a=-\dfrac{1}{2}$で交わり，$a=1$で接する。

　以上より，点$(a,\ b)$の動きうる範囲は，①②から，

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2$$

　この不等式をab平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

$\boxed{4}$　　問題のページへ

(1)　$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2p,\ 2p^2)$$

ここで, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと, $x=2p$, $y=2p^2$ から,

$$y=2\left(\frac{x}{2}\right)^2,\ \ y=\frac{1}{2}x^2\ (-2\leqq x\leqq 2)$$

したがって, 点 Q の軌跡は, 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ の $-2\leqq x\leqq 2$ の部分である。

(2)　線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0\leqq r\leqq 1)$ に対して,

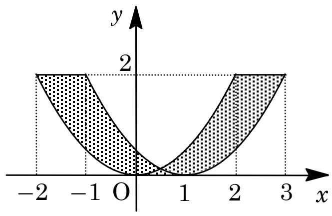
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで, 点 R を固定すると, (1)から, 点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き, その方程式は,

$$y=\frac{1}{2}(x-r)^2\quad(r-2\leqq x\leqq r+2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして, 点 R を $0\leqq r\leqq 1$ で動かすと, (*)で表される放物線の一部は, x 軸方向に平行移動する。

これより点 S が動く領域は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと, 直線 $x=\frac{1}{2}$ についての対称性から,

$$S=2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}x^2dx+1\cdot 2-\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-1)^2dx\right\}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dx+4-\int_{1}^{3}(x-1)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}+4-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8}+4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{95}{24}$$

［解　説］

軌跡を求める問題です。(2)は, 東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。