1

解答解説のページへ

座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s, t は実数で，$0<s$，$0<t<1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

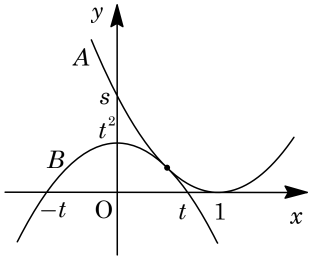
(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

1

問題のページへ



放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を連立して,

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2,\ (s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$$

$0<s$, $0<t<1$ で, A と B が 1 点を共有することより,

$$D/4=s^2-(s+1)(s-t^2)=0,\ (t^2-1)s+t^2=0$$

よって, $s=\dfrac{t^2}{1-t^2}\cdots\cdots\cdots(*)$

さて, A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は,

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=\Big[\frac{s}{3}(x-1)^3\Big]_0^1=\frac{s}{3}$$

また, B の $x\geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は,

$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+t^2x\Big]_0^t=-\frac{t^3}{3}+t^3=\frac{2}{3}t^3$$

すると, $\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2}{3}t^3\cdot\dfrac{3}{s}=\dfrac{2t^3}{s}$ となり, $(*)$を代入すると,

$$\frac{Q}{P}=2t^3\cdot\frac{1-t^2}{t^2}=2t(1-t^2)=2t-2t^3$$

ここで, $f(t)=2t-2t^3\ (0<t<1)$ とおくと,

$$f'(t)=2-6t^2=-2(3t^2-1)$$

これより, $f(t)$ の増減は右表のようになり, $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

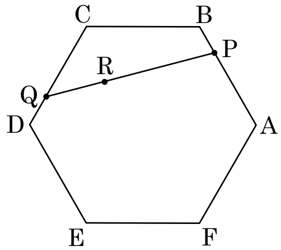
よって, $\dfrac{Q}{P}=f(t)$ の最大値は, $2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(1-\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ である。

［解　説］

微積分の融合した基本問題です。計算も易しめです。

2

問題のページへ



1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB 上を点 P, 辺 CD 上を点 Q が独立に動くとき，$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$ として，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB} = p:1-p$，$\mathrm{DQ}:\mathrm{QC} = q:1-q$ とおく。

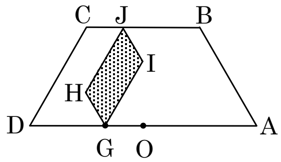
さて, AD の中点を O とし，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ} = 2:1$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{AB}}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}} + q\overrightarrow{\mathrm{DC}})$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで, AD を $2:1$ に内分する点を G とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{GR}} = \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

そこで，$0 \leqq \frac{1}{3}p \leqq \frac{1}{3}$，$0 \leqq \frac{2}{3}q \leqq \frac{2}{3}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと，点 R は右図の平行四辺形 GIJH の内部または辺上を動く。



$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}| = \frac{2}{3}$，$\angle\mathrm{HGI} = \frac{\pi}{3}$ より，その面積は,

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

［解 説］

平面ベクトルと領域の問題です。成分表示を利用するかどうかで, 2 つの解法があります。この問題ではどちらでも可能ですが, 前者は後者に比べ, 記述量がかなり増えます。

3

問題のページへ

(1)　点 P が最初に原点 O にあるとき，1 秒後に移る点$(s,\ t)$は，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$のいずれかであり，その移動確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

ここで，$t-s=-1$を満たすのは，$(1,\ 0)$，$(0,\ -1)$なので，その確率は，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(2)　点 P が$(m,\ n)$にあるとき，1 秒後に$(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$に移る事象を，それぞれ$A,\ B,\ C,\ D$とする。そして，6 秒後に O から直線$y=x$上に移り，A, B, C, Dがそれぞれa回，b回，c回，d回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-d=a-c\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，AまたはDが 3 回，BまたはCが 3 回起こったことより，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての基本問題です。なお，(2)は(1)の結果を利用せずに解いています。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき, ①から, 帰納的に, すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると, 2 以上の自然数 g を用いて,

$$b_{n+1}=gb_{n+1}{}',\ b_n=gb_n{}'\ \ (b_{n+1}{}',\ b_n{}' \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}{}'-4b_n{}')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解　説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。