**1**　解答解説のページへ

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1)　このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2)　このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

平面上の半径 1 の円 $C$ の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる。点 L を通る円 $C$ の 2 本の接線を考え，この 2 本の接線と円 $C$ の接点をそれぞれ M，N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　三角形 LMN の面積を求めよ。

(2)　三角形 LMN の内接円の半径 $r$ と，三角形 LMN の外接円の半径 $R$ をそれぞれ求めよ。

**3**

解答解説のページへ

　$a$ を実数とし，2 次関数 $f(x)=x^2+2ax-3$ を考える。実数 $x$ が $a \leqq x \leqq a+3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を，それぞれ $M(a)$ および $m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を $a$ を用いて表せ。

(2)　$m(a)$ を $a$ を用いて表せ。

(3)　$a$ がすべての実数を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。実数 $x$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を $S$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=-2|x-1|+2$ に対して，$S$ の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，$S$ の値を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から, A, B の 2 人が, A から交互に, 袋から玉を 1 個ずつ取り出す。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。そして, A が赤玉を取り出したら A の勝ち, B が白玉を取り出したら B の勝ち, 袋から玉がなくなったら引き分けとする。

　このとき, 引き分けとなるのは, A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)と取り出す場合で, その確率は$\dfrac{5!\times 4!}{9!}=\dfrac{1}{126}$である。

(2)　A が勝つのは次の場合があり, それぞれの確率は,

(i)　A(赤)のとき　$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_1}{{}_9\mathrm{P}_1}=\dfrac{4}{9}$

(ii)　A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_1\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3}=\dfrac{5}{42}$

(iii) A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_5}=\dfrac{2}{63}$

(iv)　A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_3\times{}_4\mathrm{P}_4}{{}_9\mathrm{P}_7}=\dfrac{1}{126}$

(i)～(iv)より, A が勝つ確率は, $\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{42}+\dfrac{2}{63}+\dfrac{1}{126}=\dfrac{38}{63}$である。

［解　説］

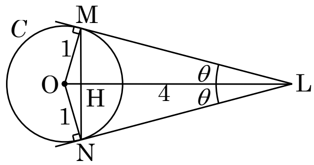
確率についての基本題です。計算ミスだけに要注意です。



© 電送数学舎 2023

$\boxed{2}$

問題のページへ




(1)　中心 O, 半径 1 の円 $C$ に，$\mathrm{OL}=4$ を満たす点 L から円 $C$ に 2 本の接線を引き，その接点を M, N とする。

$\mathrm{LM}=\mathrm{LN}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ から，$\mathrm{MN}\perp\mathrm{OL}$ となり，線分 MN と線分 OL の交点を H とおくと, H は線分 MN の中点である。

そして，$\angle\mathrm{OLM}=\angle\mathrm{OLN}=\theta$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ となり，

$$\mathrm{MN}=2\cdot\mathrm{LM}\sin\theta=2\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2},\ \ \mathrm{LH}=\mathrm{LM}\cos\theta=\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{15}{4}$$

よって，$\triangle\mathrm{LMN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{LH}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{15}{4}=\dfrac{15}{16}\sqrt{15}\cdots\cdots\cdots(*)$

(2)　$\triangle\mathrm{LMN}$ の内接円の半径を $r$ とすると，

$$\triangle\mathrm{LMN}=\frac{1}{2}(\mathrm{LM}+\mathrm{MN}+\mathrm{NL})r=\frac{1}{2}\left(\sqrt{15}+\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{15}\right)r=\frac{5}{4}\sqrt{15}r$$

$(*)$より $\dfrac{5}{4}\sqrt{15}r=\dfrac{15}{16}\sqrt{15}$ となり，$r=\dfrac{3}{4}$ である。

また，$\triangle\mathrm{LMN}$ の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理から $\dfrac{\mathrm{MN}}{\sin 2\theta}=2R$ となり，

$$R=\frac{\mathrm{MN}}{2\sin 2\theta}=\frac{\mathrm{MN}}{4\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}=2$$

［解　説］

円と接線を題材にした基本的な三角比の応用問題です。最初は座標系を設定しようかとも思ったのですが。なお，(2)の $R$ は OL の半分としても構いません。



© 電送数学舎 2023

**3**

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+2ax-3=(x+a)^2-a^2-3$ に対して，$a\leqq x\leqq a+3$ における最大値を $M(a)$ とすると，グラフの軸 $x=-a$ と区間の中点 $x=a+\dfrac{3}{2}$ の大小関係により，

(i)　$-a<a+\dfrac{3}{2}\left(a>-\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

$$M(a)=f(a+3)=(a+3)^2+2a(a+3)-3=3a^2+12a+6$$

(ii)　$-a\geqq a+\dfrac{3}{2}\left(a\leqq-\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

$$M(a)=f(a)=a^2+2a^2-3=3a^2-3$$

(2)　$f(x)$ の $a\leqq x\leqq a+3$ における最小値を $m(a)$ とすると，グラフの軸 $x=-a$ と区間の端点 $x=a$，$x=a+3$ の大小関係により，

(i)　$-a<a\ (a>0)$ のとき　$m(a)=f(a)=3a^2-3$

(ii)　$a\leqq-a<a+3\left(-\dfrac{3}{2}<a\leqq 0\right)$ のとき　$m(a)=f(-a)=-a^2-3$

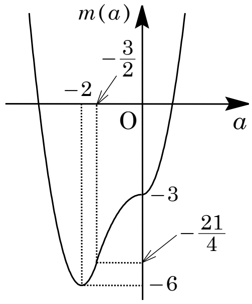
(iii)　$a+3\leqq-a\left(a\leqq-\dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$m(a)=f(a+3)=3a^2+12a+6$

(3)　(2)から，$3a^2+12a+6=3(a+2)^2-6$ となり，

$$m(a)=3a^2-3\ (a>0)$$

$$m(a)=-a^2-3\left(-\dfrac{3}{2}<a\leqq 0\right)$$

$$m(a)=3(a+2)^2-6\left(a\leqq-\dfrac{3}{2}\right)$$




これより，$m(a)$ のグラフは右図のようになり，$m(a)$ は $a=-2$ のとき最小値 $-6$ をとる。

［解 説］

2 次関数の最大・最小問題です。教科書の例題にあるような典型題です。



© 電送数学舎 2023

$\boxed{4}$

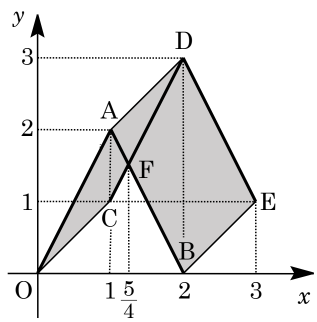
問題のページへ

(1)　$f(x)=-2|x-1|+2$ に対して，

$x\geqq1$ のとき，$f(x)=-2(x-1)+2=-2x+4$

$x<1$ のとき，$f(x)=2(x-1)+2=2x$

さて，実数 $x$ が $0\leqq x\leqq2$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ は点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を結ぶ折れ線上，点 $\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ 1)$ から，点 $\mathrm{C}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{D}(2,\ 3)$，点 $\mathrm{E}(3,\ 1)$ を結ぶ折れ線上を動くので，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部となる。




また，線分 AB と CD の交点を F とおくと，F の $x$ 座標は，

$$-2x+4=2(x-1)+1,\quad 4x=5,\quad x=\frac{5}{4}$$

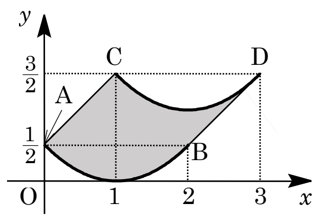
そこで，網点部の面積を $S$ とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot(3-1)=\frac{5}{8}+3=\frac{29}{8}$$

(2)　$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ に対し $f'(x)=x-1$ より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 1 となるのは，$f'(t)=t-1=1$ から $t=2$ である。

すると，接線の方程式は，$y-\frac{1}{2}(2-1)^2=x-2$ から $y=x-\frac{3}{2}$ となる。

(3)　まず，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ は放物線 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 上，点 $\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ は放物線 $y-1=\frac{1}{2}(x-1-1)^2$ すなわち $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 上を動くので，$0\leqq x\leqq2$ のとき，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部となる。




ここで，4 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$ とおくと，網点部の面積 $S$ は，平行四辺形 ABDC の面積に等しいので，

$$S=2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=2$$

［解　説］

線分の通過領域の問題です。なお，この領域の面積について，本問のように平行移動の場合は，平行四辺形に着目するのがポイントです。もちろん定積分で計算してもよいですが……。



© 電送数学舎 2023