1

解答解説のページへ

K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1)　$K=99$ のとき, N を求めよ。

(2)　$K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ。

(3)　$N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える。

(1)　$f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を α_1，α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$ とする。$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ。

(3)　$f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ とする。

(1)　正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xy 平面の第 1 象限内において，直線 $l: y=mx\ (m>0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y=tx\ (t>0)$ を考える。また，直線 l と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし，$b>a$ とする。

(1)　m を用いて t を表せ。

(2)　t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標空間内において，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 1,\ -1)$，$\vec{c}=(0,\ 0,\ 1)$ が定める 2 直線 $l:s\vec{a}$，$l':t\vec{b}+\vec{c}$ ($s,\ t$ は実数) を考える。点 A_1 を原点 $(0,\ 0,\ 0)$ とし，点 A_1 から直線 l' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく。次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\vec{b}+\vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく。同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\vec{a})$ から直線 l' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\vec{b}+\vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b}+\vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

(1)　s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2)　極限値 $S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$，$T=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた $S,\ T$ に対して，点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\vec{a})$，$\mathrm{B}(T\vec{b}+\vec{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 l，l' の両方と直交することを示せ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$l+m+n=99$ を満たす正の奇数の組$(l,\ m,\ n)$に対して，$a,\ b,\ c$ を自然数とし，$l=2a-1$，$m=2b-1$，$n=2c-1$ とおくと，奇数$(l,\ m,\ n)$の組の個数 N は自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数と一致し，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=99,\ a+b+c=51\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，${}_{51-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{50}\mathrm{C}_2=\frac{50\times49}{2}=1225$$

(2)　(1)のとき，l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組$(l,\ m,\ n)$は,

(i)　$l=m=n$ のとき　①から $3a=51$ となり，$(a,\ b,\ c)=(17,\ 17,\ 17)$

これより，$(l,\ m,\ n)$は 1 組ある。

(ii)　$l=m\neq n$ のとき　①から $a=b\neq c$ となり，$2a+c=51$ かつ $a\neq c$ から,

$$(a,\ c)=(1,\ 49),\ (2,\ 47),\ \cdots,\ (16,\ 19),\ (18,\ 15),\ \cdots,\ (25,\ 1)$$

これより，$(l,\ m,\ n)$は $25-1=24$ 組ある。

(iii)　$l=n\neq m$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$は 24 組ある。

(iv)　$m=n\neq l$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$は 24 組ある。

(i)～(iv)より，求める$(l,\ m,\ n)$の組の個数は $1+24\times3=73$ となる。

(3)　K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ のとき，(1)と同様にすると，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=K,\ a+b+c=\frac{K+3}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

②を満たす自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，${}_{\frac{K+3}{2}-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{\frac{K+1}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}=\frac{K^2-1}{8}$$

ここで，$N>K$ のとき $\frac{K^2-1}{8}>K$ となり，$K^2-8K-1>0$ より $K>4+\sqrt{17}$

よって，$N>K$ を満たす最小の K は，$4<\sqrt{17}<5$ から 9 である。

［解　説］

整数解の個数についての有名問題です。(1)と(3)については，記述を省きましたが，球としきりの配置で場合の数を数えています。

2

問題のページへ

(1)　4 次関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ は，x^4 の係数が正より $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ となり，最小値が存在する。そこで，$f(x)=\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+a-\dfrac{9}{4}\right\}(x+1)^2$ と変形すると，

(a)　$a-\dfrac{9}{4}\geqq 0\left(a\geqq\dfrac{9}{4}\right)$ のとき　$f(x)\geqq 0$ から，$f(x)$ の最小値は 0 以上である。

(b)　$a-\dfrac{9}{4}<0\left(a<\dfrac{9}{4}\right)$ のとき

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(a-\dfrac{9}{4}\right)<0$ となるので，$f(x)$ の最小値は負である。

(a)(b)より，$f(x)$ の最小値が負となる条件は，$a<\dfrac{9}{4}$ である。

(2)　$f'(x)=(2x+3)(x+1)^2+(x^2+3x+a)\cdot 2(x+1)=(x+1)(4x^2+11x+2a+3)$

ここで，$g(x)=4x^2+11x+2a+3$ とおき，$g(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$D=121-16(2a+3)=-32a+73$$

すると，$a<2$ のとき $D>0$ となるので，$g(x)=0$ は異なる 2 実数解をもち，これを $x=p,\ q\ (p<q)$ とおくと，$g(x)=4(x-p)(x-q)$ から，

$$f'(x)=4(x+1)(x-p)(x-q)$$

$a<2$ のとき $g(-1)=2a-4<0$ から，$p<-1<q$ となり，これより $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	p	$\cdots$	-1	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↘		↗

$f(x)$ が極小となる x の値が $\alpha_1,\ \alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_2)$ なので，$p=\alpha_1,\ q=\alpha_2$ である。

さて，$f(x)=x^4+5x^3+(a+7)x^2+(2a+3)x+a$ とし，$f(x)$ を $g(x)$ で割ると，

$$f(x)=g(x)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{16}x+\frac{8a+1}{64}\right)-\frac{32a-73}{64}x+a-\frac{(8a+1)(2a+3)}{64}$$

これより，$f(q)-f(p)=-\dfrac{32a-73}{64}(q-p)$ となり，$a<2$ のとき $-32a+73>0$ なので，$f(q)-f(p)>0$ すなわち $f(p)<f(q)$ から $f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ である。

(3)　$f'(x)=(x+1)g(x)$ に注意して場合分けをすると，

(i)　$D<0\left(a>\dfrac{73}{32}\right)$ のとき

$g(x)>0$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

すると，$\beta=-1$ となり条件に適する。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

(ii)　$D=0\left(a=\dfrac{73}{32}\right)$ のとき

$g(x)=\left(2x+\dfrac{11}{4}\right)^2$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

すると，$\beta=-1$ となり条件に適する。

x	$\cdots$	$-\dfrac{11}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	0	↗

(iii) $D>0\left(a<\dfrac{73}{32}\right)$のとき

$g(x)=4(x-p)(x-q)\ (p<q)$となり，$g(-1)=2a-4$に注意して，

(iii-i) $g(-1)>0\left(2<a<\dfrac{73}{32}\right)$のとき

$\dfrac{p+q}{2}=-\dfrac{11}{8}$で，$g(-1)>0$なので$p<q<-1$となり，これより$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，$a<\dfrac{9}{4}$のとき，(1)から$f(p)<0$なので$\beta=p$となり条件に適する。

また，$a=\dfrac{9}{4}$のとき，$f(x)=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2(x+1)^2$となり$\beta=-\dfrac{3}{2}$で条件に適する。

さらに，$a>\dfrac{9}{4}$のとき，$f(p)>0$となり$x=-1$で最小値をとるので不適である。

以上より，$2<a\leqq\dfrac{9}{4}$のとき条件に適する。

(iii-ii) $g(-1)=0\ (a=2)$のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+1)(4x^2+11x+7)\\&=(x+1)^2(4x+7)\end{aligned}$$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。すると，$\beta=-\dfrac{7}{4}$となり条件に適する。

x	$\cdots$	$-\dfrac{7}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

(iii-iii) $g(-1)<0\ (a<2)$のとき

(2)より，$f(p)<f(q)$から，$\beta=p$となり条件に適する。

(i)～(iii)より，求めるaの範囲は，$a\leqq\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{73}{32}\leqq a$である。

［解 説］

4 次関数の微分と増減の問題ですが，繁雑な場合分けが必要で，時間的には厳しいものがあります。なお，(1)については，初め，真正面から攻略したのですが沈没してしまい，方針を転換しました。もっとも，まったく無駄ではありませんでしたが。

3

問題のページへ

(1) $x>0$ のとき，$\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2-(1+x)=\dfrac{x^2}{4}>0$ から，$1+x<\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2$ ……①となり，

$$(1+x)-\left(\frac{x}{2+x}+1\right)^2=x-\frac{x^2}{(2+x)^2}-\frac{2x}{2+x}=x\cdot\frac{(2+x)^2-x-2(2+x)}{(2+x)^2}$$
$$=x\cdot\frac{x^2+x}{(2+x)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(2+x)^2}>0$$

これより，$\left(\dfrac{x}{2+x}+1\right)^2<1+x$ ……②となり，①②から，

$$\left(\frac{x}{2+x}+1\right)^2<1+x<\left(\frac{x}{2}+1\right)^2,\quad \frac{x}{2+x}+1<\sqrt{1+x}<\frac{x}{2}+1$$

よって，$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\dfrac{x}{2}$ ………③

(2) 正の整数 n, k に対して $\dfrac{k}{n^2}>0$ なので，③から，$\dfrac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\leqq\dfrac{\frac{k}{n^2}}{2}$

ここで，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$ ………④

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n+1}{4n}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+n}=\frac{1}{2n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n+1}{2(2n+1)}$$

④より，$\dfrac{n+1}{2(2n+1)}\leqq S_n\leqq\dfrac{n+1}{4n}$ となり，

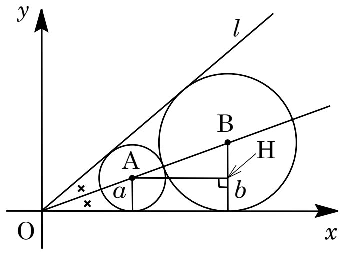
すると，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{n+1}{4n}\to\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{n+1}{2(2n+1)}\to\dfrac{1}{4}$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

［解 説］

不等式を利用して，無限級数の和を求める問題です。(1)は微分の応用，(2)は区分求積法の利用という手も考えられます。

4

問題のページへ



(1) 直線$l: y = mx\ (m > 0)$と x 軸に接している中心 A で半径 a の円 C, および直線 l と x 軸と円 C に接している中心 B で半径 b の円がある。ただし$b > a$とする。

ここで, 円 C の中心を通る直線$y = tx\ (t > 0)$に対して，$t = \tan\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと,

$$m = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2t}{1-t^2} \cdots\cdots\cdots ①$$

これより$(1-t^2)m = 2t$となり，$mt^2 + 2t - m = 0$から，$t > 0$に注意すると,

$$t = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m} \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) 右上図のように，$\mathrm{AH} \perp \mathrm{BH}$となるように点 H を決めると，$\angle\mathrm{BAH} = \theta$となり,

$$\mathrm{AB} = a+b,\ \ \mathrm{BH} = b-a,\ \ \mathrm{AH} = \sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2} = 2\sqrt{ab}$$

$t = \tan\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ より，$2t = \dfrac{b-a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ となり，$p = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ とおくと,

$$2t = p - \frac{1}{p},\ \ p^2 - 2tp - 1 = 0,\ \ p = t \pm \sqrt{t^2+1}$$

すると，$p > 1$ より $p = t + \sqrt{t^2+1}$ となり,

$$\frac{b}{a} = p^2 = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^2 = 2t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2+1} \cdots\cdots\cdots ③$$

(3) ①③より，$\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{b}{a} - 1\right) = \dfrac{1-t^2}{2t}\left(2t^2 + 2t\sqrt{t^2+1}\right) = (1-t^2)\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$

ここで，②より$t = \dfrac{m}{1+\sqrt{1+m^2}}$なので，$m \to +0$のとき$t \to +0$となり,

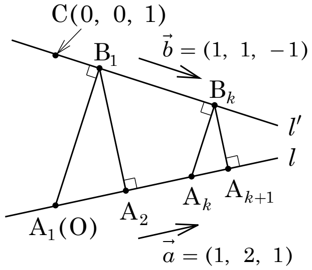
$$\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a} - 1\right) = \lim_{t\to+0}(1-t^2)\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) = 1$$

［解 説］

よく見かける構図の円と接線の問題に，極限計算が味付けされています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　2 直線 $l:s\vec{a}$，$l':t\vec{b}+\vec{c}$ (s，t は実数) に対して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\vec{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\vec{b}+\vec{c})$ をとり，$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\perp l'$ から，

$$(-s_n\vec{a}+t_n\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}=0$$

$$-s_n(1+2-1)+t_n(1+1+1)+(-1)=0$$

これより，$-2s_n+3t_n-1=0$ ………①

また，$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\perp l$ から，$(-s_{n+1}\vec{a}+t_n\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$$-s_{n+1}(1+4+1)+t_n(1+2-1)+1=0,\ -6s_{n+1}+2t_n+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より $t_n=3s_{n+1}-\dfrac{1}{2}$ ……③となり，③を①に代入して，

$$-2s_n+3\left(3s_{n+1}-\frac{1}{2}\right)-1=0,\ 9s_{n+1}-2s_n-\frac{5}{2}=0,\ s_{n+1}=\frac{2}{9}s_n+\frac{5}{18}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　④より，$s_{n+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_n-\dfrac{5}{14}\right)$ となり，$s_1=0$ から，

$$s_n-\frac{5}{14}=\left(s_1-\frac{5}{14}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}=-\frac{5}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

よって，$s_n=\dfrac{5}{14}-\dfrac{5}{14}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$ より，$S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{5}{14}$

また，③から，$t_n=3\left\{\dfrac{5}{14}-\dfrac{5}{14}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n}\right\}-\dfrac{1}{2}$ となり，$T=\displaystyle\lim_{n\to\infty}t_n=3\cdot\frac{5}{14}-\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$

(3)　$\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\dfrac{5}{14}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{a}=\left(-\frac{5}{14}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=-\frac{5}{14}(1+4+1)+\frac{4}{7}(1+2-1)+1=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{b}=\left(-\frac{5}{14}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\frac{5}{14}(1+2-1)+\frac{4}{7}(1+1+1)+(-1)=0$$

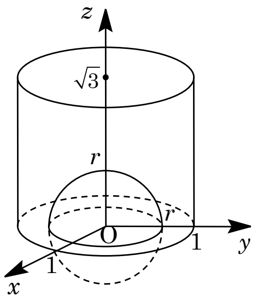
よって，直線 AB は 2 直線 l，l' の両方と直交する。

［解 説］

空間図形を題材とした数列の極限の基本的な問題です。ただ，問題文の記法に戸惑うと……。

$\boxed{6}$

問題のページへ



半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱は,

$$x^2+y^2 \leqq 1 \ \text{かつ} \ 0 \leqq z \leqq \sqrt{3} \cdots\cdots\cdots ①$$

また, 半径が r の球は, $x^2+y^2+z^2 \leqq r^2 \cdots\cdots\cdots ②$

このとき, 直円柱の内部と球の内部の共通部分は, ①かつ②を yz 平面で切断し, この断面を z 軸のまわりに回転した立体になる。

そこで, yz 平面$(x=0)$での断面は,

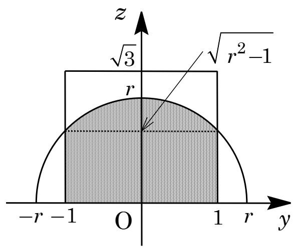
$$-1 \leqq y \leqq 1 \ \text{かつ} \ 0 \leqq z \leqq \sqrt{3} \ \text{かつ} \ y^2+z^2 \leqq r^2$$

そして, 共通部分の体積を $V(r)$ とおくと,

(i)　$0 < r \leqq 1$ のとき

共通部分は半球になるので, $V(r)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

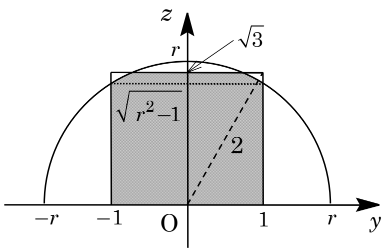
(ii)　$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき



共通部分の $x=0$ での断面は右図の網点部となり,

$$
\begin{aligned}
V(r)&=\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r} y^2\,dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r}(r^2-z^2)dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big[r^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_{\sqrt{r^2-1}}^{r}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi r^2\left(r-\sqrt{r^2-1}\right)-\frac{\pi}{3}\left\{r^3-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{2r^2+1}{3}\sqrt{r^2-1}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{2r^2-2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

(iii)　$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき



共通部分の $x=0$ での断面は右図の網点部となり,

$$
\begin{aligned}
V(r)&=\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}} y^2\,dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}(r^2-z^2)dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big[r^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi r^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}\right)-\frac{\pi}{3}\left\{3\sqrt{3}-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\left(\sqrt{3}r^2-\frac{2r^2+1}{3}\sqrt{r^2-1}-\sqrt{3}\right)\\
&=\pi\left(\sqrt{3}r^2-\frac{2r^2-2}{3}\sqrt{r^2-1}-\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

(iv)　$r \geqq 2$ のとき

共通部分は直円柱になるので，$V(r) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\pi$

［解　説］

共通部分の体積の問題です。回転体の体積として計算できますので，場合分けは面倒ではありません。計算はやや難ですが。