1

解答解説のページへ

K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組$(l,\ m,\ n)$の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1)　$K=99$ のとき，N を求めよ。

(2)　$K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組$(l,\ m,\ n)$の個数を求めよ。

(3)　$N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

実数 t の関数 $F(t)=\displaystyle\int_0^1 \left|x^2-t^2\right|dx$ について考える。

(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$F(t)$ を t の整式として表せ。

(2)　$t \geqq 0$ のとき，$F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とし，xy 平面上の直線 $l : ax+by-2=0$ を考える。

(1)　直線 l と原点の距離が 2 以上であり，直線 l と直線 $x=1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲 D を求め，ab 平面上に図示せよ。

(2)　点 $(a,\ b)$ が(1)で求めた範囲 D を動くとする。このとき，$3a+2b$ を最大にする $a,\ b$ の値と，$3a+2b$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間内の点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{6},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 OABC を考える。3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち，点 O に最も近く，x 座標が正のものを H とする。

(1)　H の座標を求めよ。

(2)　3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$l+m+n=99$ を満たす正の奇数の組$(l,\ m,\ n)$に対して，$a,\ b,\ c$ を自然数とし，$l=2a-1$，$m=2b-1$，$n=2c-1$ とおくと，奇数$(l,\ m,\ n)$の組の個数 N は自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数と一致し，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=99,\ a+b+c=51\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，${}_{51-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{50}\mathrm{C}_2=\frac{50\times 49}{2}=1225$$

(2)　(1)のとき，l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組$(l,\ m,\ n)$は，

(i)　$l=m=n$ のとき　①から $3a=51$ となり，$(a,\ b,\ c)=(17,\ 17,\ 17)$

これより，$(l,\ m,\ n)$は 1 組ある。

(ii)　$l=m\neq n$ のとき　①から $a=b\neq c$ となり，$2a+c=51$ かつ $a\neq c$ から，

$$(a,\ c)=(1,\ 49),\ (2,\ 47),\ \cdots,\ (16,\ 19),\ (18,\ 15),\ \cdots,\ (25,\ 1)$$

これより，$(l,\ m,\ n)$は $25-1=24$ 組ある。

(iii)　$l=n\neq m$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$は 24 組ある。

(iv)　$m=n\neq l$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$は 24 組ある。

(i)～(iv)より，求める$(l,\ m,\ n)$の組の個数は $1+24\times 3=73$ となる。

(3)　K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ のとき，(1)と同様にすると，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=K,\ a+b+c=\frac{K+3}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

②を満たす自然数$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，${}_{\frac{K+3}{2}-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{\frac{K+1}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}=\frac{K^2-1}{8}$$

ここで，$N>K$ のとき $\dfrac{K^2-1}{8}>K$ となり，$K^2-8K-1>0$ より $K>4+\sqrt{17}$

よって，$N>K$ を満たす最小の K は，$4<\sqrt{17}<5$ から 9 である。

［解　説］

整数解の個数についての有名問題です。(1)と(3)については，記述を省きましたが，球としきりの配置で場合の数を数えています。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$F(t)=\int_0^1 \left|x^2-t^2\right|dx$ に対して，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$F(t)=\int_0^t -(x^2-t^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+t^2x\Big]_0^t+\Big[\frac{x^3}{3}-t^2x\Big]_t^1$$
$$=-\frac{t^3}{3}+t^3+\frac{1}{3}(1-t^3)-t^2(1-t)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，(1)から，$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

また，$t \geqq 1$ のとき，$F(t)=\int_0^1 -(x^2-t^2)\,dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+t^2x\Big]_0^1=-\frac{1}{3}+t^2$ となり，

$$F'(t)=2t>0$$

$F(t)$ は連続な関数で，$t \geqq 0$ における $F(t)$ の増減は右表のようになる。

すると，$F(t)$ を最小にする t の値 T は $T=\frac{1}{2}$ であり，最小値は $F(T)=\frac{1}{4}$ となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(t)$	0	$-$	0	$+$		$+$
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

［解　説］

絶対値つき関数の定積分を題材にした基本題です。

3

問題のページへ

(1)　直線$l: ax+by-2=0$ $(a>0,\ b>0)$に対して，lと原点の距離が 2 以上より，

$$\frac{|-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}\geqq 2,\ \sqrt{a^2+b^2}\leqq 1,\ a^2+b^2\leqq 1\cdots\cdots\cdots①$$

また，lと直線$x=1$の交点のy座標が 2 以上より，$l: y=\dfrac{-ax+2}{b}$として，

$$y=\frac{-a+2}{b}\geqq 2,\ -a+2\geqq 2b,\ b\leqq -\frac{1}{2}a+1\cdots\cdots\cdots②$$

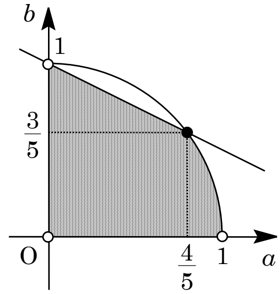
①の境界線$a^2+b^2=1$と②の境界線$b=-\dfrac{1}{2}a+1$の交点は，

$$a^2+\left(-\frac{1}{2}a+1\right)^2=1,\ \frac{5}{4}a^2-a=0$$

すると，$a=0$のとき$b=1$，$a=\dfrac{4}{5}$のとき$b=\dfrac{3}{5}$である。

よって，点$(a,\ b)$のとりうる範囲 D を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

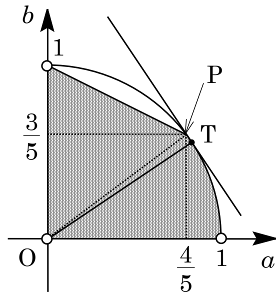
ただし，軸上の境界以外は領域に含む。



(2)　$k=3a+2b$とおくと，$b=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{k}{2}\cdots\cdots\cdots③$

①の境界線と直線③が接するとき，その接点を T とすると，直線 OT は③と直交するので，その傾きは$\dfrac{2}{3}$となる。

また，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$とおくと，直線 OP の傾きは$\dfrac{3}{4}$なので，$\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$から，接点 T は範囲$D$の境界線上にある。



ここで，$\mathrm{OT}: b=\dfrac{2}{3}a$から，接点 T の座標は，

$$a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=1,\ \frac{13}{9}a^2=1,\ a=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

これより，$b=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$となり，$\mathrm{T}\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$である。

以上より，$k=3a+2b$は$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$のとき最大となり，最大値は，

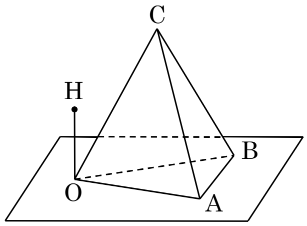
$$k=3\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

［解 説］

領域と最大・最小の問題です。(2)では，細かい詰めの作業が必要になります。

4

問題のページへ



(1) 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$B(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，$C(\sqrt{6},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2})$に対し，平面 OAB からの距離が 1 で，点 O に最も近い点を $H(p,\ q,\ r)$ $(p>0)$ とおくと，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$かつ$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$より，

$$p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r=0\cdots\cdots①,\ -\sqrt{3}p+r=0\cdots\cdots②$$

②より $r=\sqrt{3}p$ となり，①に代入して $p+\sqrt{2}q+3p=0$ から $q=-2\sqrt{2}p$

そして，$|\overrightarrow{OH}|=1$から，$p^2+(-2\sqrt{2}p)^2+(\sqrt{3}p)^2=1$となり，$p>0$から，

$$12p^2=1,\ p=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$q=-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$r=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{2}$から，$H\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$である。

(2) 平面 OAB の方程式は，$\dfrac{\sqrt{3}}{6}x-\dfrac{\sqrt{6}}{3}y+\dfrac{1}{2}z=0$ より $\sqrt{3}x-2\sqrt{6}y+3z=0$

これより，点 C と平面 OAB の距離 d は，

$$d=\frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-2\sqrt{6}\cdot(-\sqrt{3})+3\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{6})^2+3^2}}=\frac{|3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3\sqrt{2}|}{\sqrt{3+24+9}}=2\sqrt{2}$$

(3) $\triangle$OAB の面積を S，四面体 OABC の体積を V とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+2+3)(3+1)-(-\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$$

すると，$V=\dfrac{1}{3}Sd=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ である。

［解　説］

四面体の体積を題材にした頻出題です。(2)は平面の方程式を利用しましたが，パラメータ表示で処理することもできます。詳しくは「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。