$\boxed{1}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b$ を $0<a<1,\ 0<b<1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\dfrac{T}{S}$ を $a,\ b$ で表せ。

(2) $a,\ b$ が $0<a<\dfrac{1}{2},\ 0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $p,\ q$ を 3 以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p},\ b=\dfrac{1}{q}$ とする。$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件(＊)を満たすものの個数を求めよ。

(＊)　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

4

解答解説のページへ

座標平面において，次の条件(＊)を満たす直線 l を考える。

(＊)　l の傾きは 1 で，曲線 $y=x^3-2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標の小さなものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1)　点 R の座標を $(a,\ a^3-2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2)　直線 l が条件(＊)を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3)　直線 l が条件(＊)を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　3 点 O, A, B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

6

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

(2)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3)　不等式 $\left|e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| < 10^{-3}$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。

必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

1

問題のページへ

曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたない条件は,

(i)　$a=0$ のとき

y 切片が 1 の直線 $y=bx+1$ になるので, 傾き b について $b\geqq 0$ である。

(ii)　$a>0$ のとき

放物線 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+1$ に対して, 軸の位置で場合分けをすると,

(ii-i)　$-\dfrac{b}{2a}\leqq 0$ $(b\geqq 0)$ のとき

点 $(0,\ 1)$ を通過し, つねに x 軸の正の部分と共有点をもたず適する。

(ii-ii)　$-\dfrac{b}{2a}>0$ $(b<0)$ のとき

頂点が x 軸の上側にあることより, $-\dfrac{b^2}{4a}+1>0$ から $b^2<4a$ である。

(iii)　$a<0$ のとき

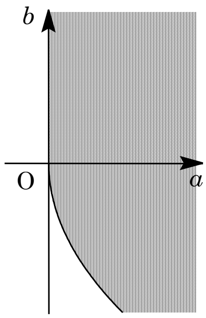
点 $(0,\ 1)$ を通過し, 放物線はつねに x 軸の正の部分と交わり不適である。

(i)～(iii)より, 求める $(a,\ b)$ の条件は,

$a\geqq 0$ かつ $b\geqq 0$

$a>0$ かつ $b<0$ かつ $b^2<4a$

この不等式を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は $a=0$ $(b\geqq 0)$ のみを含む。

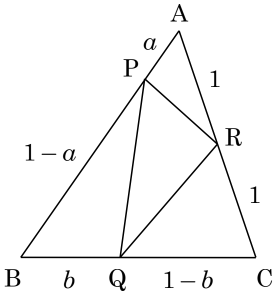


［解　説］

放物線と直線の問題で, そのイメージをもとに, 丁寧な場合分けがすべてといってもよいタイプです。

2

問題のページへ



(1) 右図において，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=a:1-a$，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=b:1-b$，$\mathrm{CR}:\mathrm{RA}=1:1$とし，$\triangle\mathrm{ABC}=S$，$\triangle\mathrm{PQR}=T$とおくと，

$$\triangle\mathrm{APR}=\frac{1}{2}aS,\ \triangle\mathrm{BQP}=b(1-a)S$$

$$\triangle\mathrm{CRQ}=\frac{1}{2}(1-b)S$$

すると，$T=S-\left\{\frac{1}{2}aS+b(1-a)S+\frac{1}{2}(1-b)S\right\}$から，

$$\frac{T}{S}=1-\left\{\frac{1}{2}a+b(1-a)+\frac{1}{2}(1-b)\right\}$$

$$=1-\frac{1}{2}a-b(1-a)-\frac{1}{2}(1-b)=ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$$

(2) $0<a<\frac{1}{2}$，$0<b<\frac{1}{2}$の範囲を動くとき，$\frac{T}{S}=f(a,\ b)$とおく。

まず，b の値を$0<b<\frac{1}{2}$で固定して a の値を$0<a<\frac{1}{2}$で動かすと，$b-\frac{1}{2}<0$なので，$f(a,\ b)=\left(b-\frac{1}{2}\right)a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$は$a$について単調に減少し，

$$f\left(\frac{1}{2},\ b\right)<f(a,\ b)<f(0,\ b),\ \frac{1}{4}<f(a,\ b)<-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$$

次に，bの値を$0<b<\frac{1}{2}$で動かすと，$-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$となり，

$$\frac{1}{4}<f(a,\ b)<\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}$$

(3) (2)から，$2<\frac{S}{T}<4$となるので，$\frac{S}{T}$が整数のとき$\frac{S}{T}=3$……①である。

ここで，p,qを3以上の整数とし，$a=\frac{1}{p}$，$b=\frac{1}{q}$とおくと，

$$\frac{S}{T}=\frac{1}{ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{pq}-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}=\frac{2pq}{2-q-p+pq}\ \cdots\cdots ②$$

①②より，$2pq=3(2-q-p+pq)$，$pq-3p-3q=-6$となり，

$$(p-3)(q-3)=-6+9,\ (p-3)(q-3)=3$$

$p-3\geqq 0$，$q-3\geqq 0$より，$(p-3,\ q-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$となり，

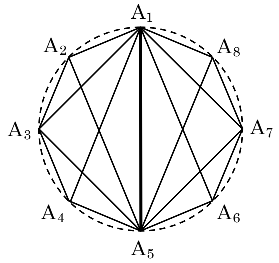
$$(p,\ q)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)$$

［解 説］

三角形の面積を題材にした最大・最小問題に，不定方程式が融合しています。

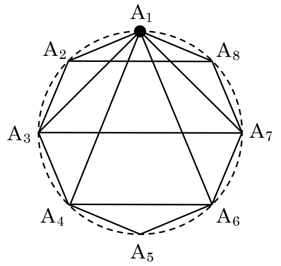
3

問題のページへ



(1)　正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の 3 個の頂点を結んでできる三角形が直角三角形になるのは，正八角形の外接円の直径が直角三角形の斜辺になる場合である。

すると，斜辺のとり方が 4 通りで，それぞれに対してもう 1 つの頂点が 6 通りずつ決まるので，直角三角形の個数は $4\times6=24$ である。



(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形が二等辺三角形になるのは，頂角の頂点のとり方が 8 通りで，それぞれに対して底辺が 3 通りずつ決まるので，二等辺三角形の個数は $8\times3=24$ である。

また，直角二等辺三角形の個数は $8\times1=8$ である。

すると，三角形の総数は ${}_8C_3=56$ より，三角形が直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は，

$$56-(24+24-8)=16$$

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形が作れるものは，外接円の直径の位置が 4 通りあるのに注意して，

(i)　四角形の 1 辺が外接円の直径のとき

直径の両端以外の 2 頂点は直径の片側にあり，そのとり方は ${}_3C_2\times2=6$ 通りずつなので，この場合の四角形の個数は $4\times6=24$ である。

(ii)　四角形の 2 本の対角線が外接円の直径のとき

この場合の四角形の個数は，2 本の対角線の決め方から ${}_4C_2=6$ である。

(iii) 四角形の 1 本の対角線だけが外接円の直径のとき

直径の両端以外の 2 頂点は直径の両側にあり，そのとり方は $3\times3=9$ 通りずつである。この中でもう 1 つの対角線も直径である(ii)の場合が 3 通りずつより，この場合の四角形の個数は，$4\times(9-3)=24$ である。

(i)～(iii)より，求める四角形の個数は，$24+6+24=54$ である。

［解　説］

場合の数について，ときどき見かけるタイプの問題です。重複やもれを防ぐには，具体的に考えていくのがベストでしょう。

4

問題のページへ

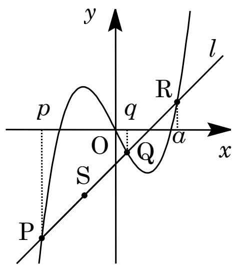
(1)　曲線 $y=x^3-2x$ ……①に対して，$y'=3x^2-2$

$y'=0$ の解は $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となり，これより y の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

さて，傾き 1 で点 $\mathrm{R}(a,\ a^3-2a)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y-(a^3-2a)=1\cdot(x-a)\,,\ \ y=x+a^3-3a\ \cdots\cdots\cdots ②$$



曲線①と l は異なる 3 点 P, Q, R で交わり，①②を連立して，$x^3-2x=x+a^3-3a$，すなわち $x^3-3x-a^3+3a=0$ から，

$$(x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$$

交点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, $q\,(p<q<a)$ とおくと，$x^2+ax+a^2-3=0$ の解が $x=p$, q から，

$$p+q=-a\,,\ \ pq=a^2-3\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，線分 PQ の中点を $\mathrm{S}(x,\ y)$ とすると，$x=\dfrac{p+q}{2}$，$y=\dfrac{p+q}{2}+a^3-3a$

③から，$x=-\dfrac{a}{2}$ ……④，$y=-\dfrac{a}{2}+a^3-3a=a^3-\dfrac{7}{2}a$ ……⑤となるので，

$$\mathrm{S}\Big(-\frac{a}{2},\ a^3-\frac{7}{2}a\Big)$$

(2)　④から $a=-2x$ となり，⑤に代入すると，$y=-8x^3+7x$

ここで，$x^2+ax+a^2-3=0$ の解 $x=p$, q が $p<q<a$ を満たす条件は，

$$D=a^2-4(a^2-3)>0\ \cdots\cdots ⑥,\ \ -\frac{a}{2}<a\ \cdots\cdots ⑦,\ \ a^2+a^2+a^2-3>0\ \cdots\cdots ⑧$$

⑥より $-2<a<2$，⑦より $a>0$，⑧より $a<-1$，$1<a$ なので，$1<a<2$ となる。

すると，④から $1<-2x<2$ となり，$-1<x<-\dfrac{1}{2}$ である。

したがって，点 S の軌跡は，曲線 $y=-8x^3+7x\ \left(-1<x<-\dfrac{1}{2}\right)$ ………⑨

(3)　⑨から $y'=-24x^2+7$ となり，$y'=0$ の解は $x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{24}}=\pm\dfrac{\sqrt{42}}{12}$ であるので，$-1<x<-\dfrac{1}{2}$ における y の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{42}}{12}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$		$\nearrow$	$-\dfrac{5}{2}$

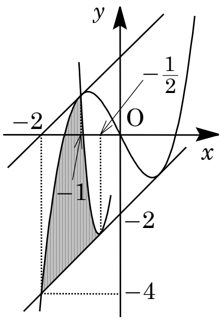
また，$a=1$ のとき，③から $p+q=-1$，$pq=-2$ より，$(p,\ q)=(-2,\ 1)$

$a=2$ のとき，③から $p+q=-2$，$pq=1$ より，$(p,\ q)=(-1,\ -1)$

これより，$1<a<2$ のとき $-2<p<-1$ となり，点 P の軌跡は，①から，

$$曲線\ y=x^3-2x\ (-2<x<-1)$$

以上より，線分 PS が動いてできる領域は，右図の網点部であり，その面積 S は，



$$S=\int_{-2}^{-1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\{(-8x^3+7x)-(x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3-3x+2)dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-8x^3+6x+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}(1-16)-\frac{3}{2}(1-4)+2(-1+2)-2\left(\frac{1}{16}-1\right)+3\left(\frac{1}{4}-1\right)+2\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=-\frac{15}{4}+\frac{9}{2}+2+\frac{15}{8}-\frac{9}{4}+1=\frac{27}{8}$$

［解　説］

線分の通過領域を題材にした問題です。(2)と(3)は計算を主体とした方法を採りましたが，処理量がかなり多めで疲れます。ここは図形的に処理した方が疲労は軽減できるでしょう。そういえば，1999 年に，同じようなタイプの過去問が出ていました。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$ が同一直線上にある条件は，$z=0$ または（$z\neq 0$ かつ k を実数として $z^2=kz$）より，

(i)　$z=0$ のとき　$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(0)$，$\mathrm{B}(0)$ より，すべて一致する。

(ii)　$z=k$ のとき　$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(k)$，$\mathrm{B}(k^2)$ より，すべて実軸上にある。

(i)(ii)より，O, A, B が同一直線上にある条件は「z が実数」である。

(2)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になる条件は，z が虚数のもとで，

(i)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ のとき　$|z|=|z^2|$ より $|z|=|z|^2$

$z\neq 0$ から $|z|=1$ となり，点 z は原点が中心で半径 1 の円周上にある。

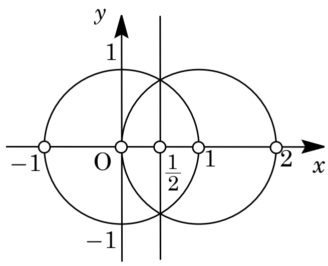
(ii)　$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ のとき　$|z|=|z^2-z|$ より $|z|=|z||z-1|$

$z\neq 0$ から $|z-1|=1$ となり，点 z は点 1 が中心で半径 1 の円周上にある。

(iii)　$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$ のとき　$|z^2|=|z^2-z|$ より，

$$|z|^2=|z||z-1|$$

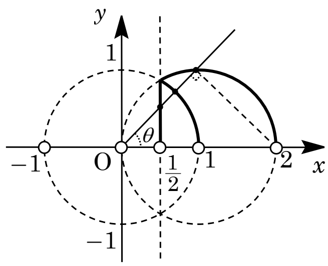
$z\neq 0$ から $|z|=|z-1|$ となり，点 z は原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。



(i)～(iii)より，点 z の存在範囲は右図のようになる。

ただし，白丸は除く。

(3)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり，z の偏角 θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，点 z は右図の太線部にある。



$\angle\mathrm{AOB}=\left|\arg\dfrac{z^2}{z}\right|=|\arg z|=\theta$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|z||z^2|\sin\theta=\frac{1}{2}|z|^3\sin\theta$$

これより，θ を $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ で固定すると，S が最大になるのは，点 z が点 1 を中心とし半径 1 の太線の円弧上にあるときで，このとき $|z|=2\cos\theta$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^3\sin\theta=4\cos^3\theta\sin\theta$$

$$S'=-12\cos^2\theta\sin^2\theta+4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(-3\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$=4\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)=4\cos^2\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})$$

これより，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における S の増減は右表のようになり，S は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき$|z|=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$から，$z=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$である。

［解 説］

複素数平面上の図形についての頻出題です。(3)は最大値を求める問題ですが，この設問も，いわゆる1文字固定の方法を採用しています。

6

問題のページへ

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^xdx$ とおくと，

$$I_{n+1}=\int_0^a\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^xdx=\Big[\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\Big]_0^a+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^xdx$$
$$=-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+I_n$$

これより，$I_{n+1}-I_n=-\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$I_n=I_1+\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}=I_1-\Big(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)$$

$I_1=\displaystyle\int_0^a(a-x)e^xdx=\big[(a-x)e^x\big]_0^a+\int_0^ae^xdx=-a+e^a-1$ より，

$$I_n=-a+e^a-1-\Big(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)=e^a-\Big(1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)$$

なお，$n=1$ を当てはめると，$I_1=e^a-(1+a)$ となり，成り立っている。

よって，$n\geqq 1$ において，$e^a=\Big(1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^3}{3!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}\Big)+I_n$ より，

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^xdx\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$\dfrac{(a-x)^n}{n!}=\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^0\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^a$ なので，

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^xdx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx=\Big[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_0^a=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ から，

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^xdx\leqq\frac{e^aa^{n+1}}{(n+1)!}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3) ①に $a=1$ を代入すると，$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^xdx$ となり，

$$\Big|e-\Big(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big)\Big|=\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^xdx\ \cdots\cdots\cdots③$$

②に $a=1$ を代入すると，$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^xdx\leqq\frac{e}{(n+1)!}\ \cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq\Big|e-\Big(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big|\leqq\dfrac{e}{(n+1)!}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，$\Big|e-\Big(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big|<10^{-3}\ \cdots\cdots(*)$ であるには，$\dfrac{1}{(n+1)!}<10^{-3}$ が必要であり，

$$(n+1)!>10^3\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$6! = 720$，$7! = 5040$ に注意すると，⑥より，

$n+1 \geqq 7$，$n \geqq 6$

逆に，$n=6$ のとき，⑤から，$\left|e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{6!}\right)\right| \leqq \dfrac{e}{7!} = \dfrac{3}{5040} < 10^{-3}$ となり，条件(＊)を満たす。

よって，求める最小の整数 n は $n=6$ である。

［解 説］

定積分と数列についての有名な問題です。(1)は漸化式を立てて直接的に証明しましたが，結論が与えられているので，数学的帰納法という手もあります。