1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，a は 0 でないとする。xy 平面上の直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2+a$ が相異なる 2 点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$\mathrm{Q}(c,\ ac)$ で交わっているとする。$c=b^2$，$b<0$ のとき，a と b を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を 1 ではない正の実数，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1)　$n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2)　この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}a_n=2{a_{n+1}}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) すべての正の整数nについて，a_nは正であることを示せ。

(2) 一般項a_nを求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た金貨は取り去り，取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える。初めは n 枚すべてが金貨であり，n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す。k 回目の試行の直後に，n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ で表す。

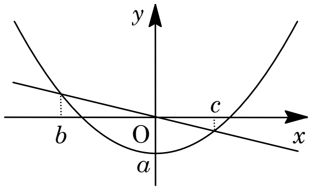
(1)　$P_1(j)$ を求めよ。

(2)　$P_k(j)$ $(k \geqq 2)$ を求めよ。

(3)　$n=3$ とする。2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが，3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ。

1

問題のページへ



直線 $y=ax$ ……①と放物線 $y=x^2+a$ ……②を連立し,

$$ax=x^2+a\,,\ \ x^2-ax+a=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで, ①と②が相異なる 2 点 $x=b$, c で交わっているので, ③の実数解が $x=b$, c となり,

$$D=a^2-4a=a(a-4)>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$b+c=a\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ \ bc=a\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて, 条件より $c=b^2$ なので, ⑤⑥から, $b+b^2=a$, $b^3=a$ となり,

$$b+b^2=b^3\,,\ \ b(b^2-b-1)=0$$

さらに, $b<0$ なので $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ となり,

$$a=\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^3=\frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8}=2-\sqrt{5}$$

なお, この値は④を満たしている。

［解 説］

放物線と直線についての基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a>0$，$a\neq 1$ のとき，$\log_a(x-6)>\dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$ ………①

$x-6>0$ かつ $12-x>0$，すなわち $6<x<12$ ……②において，

$$2\log_a(x-6)>\log_a(12-x),\ \ \log_a(x-6)^2>\log_a(12-x)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(i)　$0<a<1$ のとき　③より，$(x-6)^2<12-x$ となり，

$$x^2-11x+24<0,\ \ (x-3)(x-8)<0$$

すると，$3<x<8$ となるが，②と合わせると $6<x<8$ である。

よって，①を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii)　$a>1$ のとき　③より，$(x-6)^2>12-x$ となり，$(x-3)(x-8)>0$

すると，$x<3$, $8<x$ となるが，②と合わせると $8<x<12$ である。

よって，①を満たす整数 x は $x=9$, 10, 11 となる。

(2)　$a>0$，$a\neq 1$ のとき，正の整数 n に対し，$\log_a(x-n)>\dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$ ………④

$x-n>0$ かつ $2n-x>0$，すなわち $n<x<2n$ ……⑤において，

$$2\log_a(x-n)>\log_a(2n-x),\ \ \log_a(x-n)^2>\log_a(2n-x)\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(i)　$0<a<1$ のとき　⑥より，$(x-n)^2<2n-x$ となり，

$$(x-n)^2-(2n-x)<0,\ \ x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0$$

ここで，$f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと，

$$f(n)=-n<0,\ \ f(2n)=n^2>0$$

⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について，④を満たす整数 x が存在する条件は，

$$f(n+1)=1-(n-1)=2-n<0$$

よって，$n>2$ から，n は 3 以上の整数である。

(ii)　$a>1$ のとき　⑥より，$(x-n)^2>2n-x$ となり，$x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$

$f(n)<0$，$f(2n)>0$ に注意し，⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について，④を満たす整数 x が存在する条件は，

$$f(2n-1)=(n-1)^2-1=n(n-2)>0,\ \ n>2$$

よって，$n>2$ から，n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より，④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は，n が 3 以上の整数である。

［解　説］

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを念頭に，条件を数式化しています。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}a_n=2{a_{n+1}}^2$ ………①

ここで，すべての正の整数 n について，$a_n>0$ を数学的帰納法で示す。

(i) $n=1,\ 2$ のとき　$a_1=1>0$，$a_2=3>0$ で成立している。

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき　$a_k>0$，$a_{k+1}>0$ と仮定すると，①から，

$$a_{k+2}=\frac{2{a_{k+1}}^2}{a_k}>0$$

よって，$n=k+2$ のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての正の整数 n について，$a_n>0$ である。

(2) (1)から $a_n>0$ なので，$b_n=\log_2 a_n$ ……②とおくと，$b_1=\log_2 1=0$，$b_2=\log_2 3$

①より，$\log_2 a_{n+2}a_n=\log_2 2{a_{n+1}}^2$ から，$\log_2 a_{n+2}+\log_2 a_n=\log_2 2+2\log_2 a_{n+1}$

$$b_{n+2}+b_n=1+2b_{n+1}\,,\ b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n+1\,,\ b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n+1$$

すると，数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ は公差 1 の等差数列となり，

$$b_{n+1}-b_n=(b_2-b_1)+(n-1)\cdot 1=n+(\log_2 3-1)$$

これより，$n\geqq 2$ において，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{k+(\log_2 3-1)\}=\frac{1}{2}(n-1)n+(\log_2 3-1)(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)+(n-1)\log_2 3=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1)\log_2 3$$

この式は，$n=1$ のときも成立する。

よって，②から，$a_n=2^{b_n}$ なので，

$$a_n=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1)\log_2 3}=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\cdot 2^{\log_2 3^{n-1}}=2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\cdot 3^{n-1}$$

［解　説］

漸化式の典型題です。対数をとって処理をするために，(1)が設定されています。なお，対数の底 2 は，数列 $\{b_n\}$ の漸化式が簡単になるように配慮した結果です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　初め n 枚の硬貨がすべて金貨であるとき，与えられた試行について，1 回目の直後に金貨が j 枚残るのは，1 回目に表が j 枚出たときより，その確率 $P_1(j)$ は，

$$P_1(j)={}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}={}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2)　与えられた試行について，k 回目の直後に金貨が j 枚残るのは次の場合である。

すなわち，k 回の試行において，n 枚中 j 枚はすべて表が出て，残り $n-j$ 枚は少なくとも 1 回裏が出た場合であり，その確率 $P_k(j)$ は，j 枚の選び方 ${}_n\mathrm{C}_j$ 通りより，

$$P_k(j)={}_n\mathrm{C}_j\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j}={}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^{kj}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j}$$

(3)　$n=3$ のとき，2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが，3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になるのは，3 回目の直後に 3 枚すべてが銀貨の場合から 2 回目の直後に 3 枚すべてが銀貨の場合を除けばよいので，その確率は，

$$P_3(0)-P_2(0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^3-{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^3$$

$$=\left(\frac{7}{8}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7^3-6^3}{8^3}=\frac{(7-6)(49+42+36)}{2^9}=\frac{127}{512}$$

［解　説］

題意の把握がポイントになる確率の問題です。金貨の枚数に注目すればよいだけなのですが。なお，(3)は金貨の枚数の変化から 6 通りのパターンで考えて計算してもよいのですが，出題者の意図は上の解答例でしょう。