1　　解答解説のページへ

xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$, $D : y=-x^2$ を考える。

(1)　C と D が 2 点で交わり, その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき, C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2)　実数 a, b が(1)の条件を満たすとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線は, 放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接することを示せ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　$p(n-1)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 a は $0<a<4$ を満たすとする。xy 平面の直線 $l : y = ax$ と曲線

$$C : y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1)　C と l の交点の座標を求めよ。

(2)　$S(a)$ を求めよ。

(3)　$S(a)$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

空間内に四面体 ABCD がある。辺 AB の中点を M, 辺 CD の中点を N とする。t を 0 でない実数とし，点 G を，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$ を満たす点とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

(2)　点 G は点 N と一致しないことを示せ。

(3)　直線 NG と直線 MC は平行であることを示せ。

1

問題のページへ

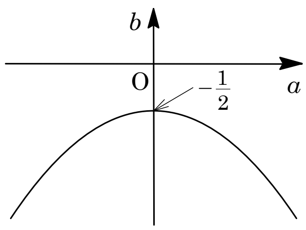
(1)　$C: y=(x-a)^2+b$ ……①，$D: y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2,\ 2x^2-2ax+a^2+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1,\ -a^2-2b=1$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2)　(1)のとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，①＋②より，

$$2y=(x-a)^2+b-x^2,\ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$y=-ax+\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{4}$ ………⑤

そして，直線⑤と放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ ……⑥を連立すると，

$$-ax+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}=-x^2-\frac{1}{4},\ x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=0$$

すると，$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2=0$ から重解 $x=\dfrac{a}{2}$ をもち，直線⑤と放物線⑥は接する。

［解 説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。

2

問題のページへ

(1)　1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき，k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず，$X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から，その確率 $p(1)$ は，$p(1) = \dfrac{1}{n}$ である。

次に，$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \geqq n$ となるのは，$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より，その確率 $p(n)$ は，

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{1}{n^{n-1}}$$

(2)　$X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 \geqq n$ となるのは，$X_1 = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは，$X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(2)$ は，

$$p(2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)\right\}$$
$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2} + X_{n-1} \geqq n$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2} = n-2$ のとき

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-2}$ はすべて 1，X_{n-1} は 2 以上より，このときの確率は，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{n-1}}$$

(ii)　$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2} = n-1$ のとき

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-2}$ はいずれか 1 つが 2 でそれ以外は 1，X_{n-1} は任意より，このときの確率は，

$$_{n-2}\mathrm{C}_1 \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-3} \times 1 = \frac{n-2}{n^{n-2}}$$

(i)(ii)より，求める確率 $p(n-1)$ は，

$$p(n-1) = \frac{n-1}{n^{n-1}} + \frac{n-2}{n^{n-2}} = \frac{n^2-n-1}{n^{n-1}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=2$ のとき，(1)から $p(1) = \dfrac{1}{2}$ であるが，このときも(*)は成立している。

［解 説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

3　　問題のページへ

(1)　$x<4$ のとき，$l: y=ax$ と $C: y=-x^2+4x$ を連立して，

$$ax=-x^2+4x\ ,\ \ x^2+(a-4)x=0$$

よって，$x=0,\ 4-a$ となる。ただし，$0<a<4$ から $0<4-a<4$ である。

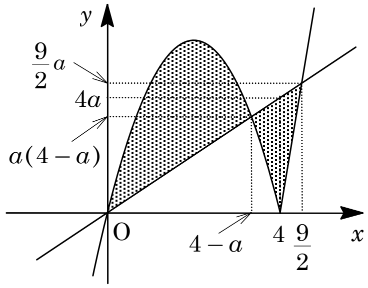
$x\geqq 4$ のとき，$l: y=ax$ と $C: y=9a(x-4)$ を連立して，

$$ax=9a(x-4)\ ,\ \ 8x-36=0$$

よって，$x=\dfrac{9}{2}$ となる。

以上より，C と l の交点の座標は，$(0,\ 0)$，$(4-a,\ a(4-a))$，$\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{9}{2}a\right)$ である。

(2)　C と l で囲まれた右図の網点部の面積 $S(a)$ は，$0\leqq x\leqq 4-a$ の部分の面積 $S_1(a)$，$4-a\leqq x\leqq 4$ の部分の面積 $S_2(a)$，さらに $4\leqq x\leqq \dfrac{9}{2}$ の部分の面積 $S_3(a)$ の和となり，



$$S_1(a)=\int_0^{4-a}(-x^2+4x-ax)dx$$

$$=-\int_0^{4-a}x(x+a-4)dx=\frac{1}{6}(4-a)^3$$

$$S_2(a)=\frac{1}{2}\{a(4-a)+4a\}\{4-(4-a)\}-\int_{4-a}^{4}(-x^2+4x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(8a-a^2)a-\int_{4-a}^{4}\{-(x-4)^2-4(x-4)\}dx$$

$$=4a^2-\frac{1}{2}a^3+\Big[\,\frac{1}{3}(x-4)^3+2(x-4)^2\,\Big]_{4-a}^{4}=-\frac{1}{6}a^3+2a^2$$

$$S_3(a)=\frac{1}{2}\Big(\frac{9}{2}-4\Big)\cdot 4a=a$$

すると，$S(a)=S_1(a)+S_2(a)+S_3(a)$ より，

$$S(a)=\frac{1}{6}(4-a)^3-\frac{1}{6}a^3+2a^2+a=-\frac{1}{3}a^3+4a^2-7a+\frac{32}{3}$$

(3)　(2)より，$S'(a)=-a^2+8a-7=-(a-1)(a-7)$

すると，$0<a<4$ における $S(a)$ の増減は右表のようになり，$S(a)$ の最小値は，

$$S(1)=-\frac{1}{3}+4-7+\frac{32}{3}=\frac{22}{3}$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

［解　説］

定積分と面積についての標準的な問題です。ただ，計算はやや難で，解答例では小さい工夫をしています。

4

問題のページへ

(1)　四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$を満たすGに対し，

$$(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})+(t-2)(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DG}})-t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\vec{0}$$

$$2t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

よって，$t\neq 0$から，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\frac{t-2}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$………(＊)

(2)　辺CDの中点をNとすると，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$となる。

さて，点 G と点 N が一致すると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{DN}}$すなわち$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$となり，(＊)から，

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\frac{t-2}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$となり，点Cが辺ABの中点となり不適である。

よって，点Gは点Nと一致しない。

(3)　辺ABの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right)=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\overrightarrow{\mathrm{DG}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$となり，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\frac{t-2}{2t}\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=-\frac{1}{2t}(2\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{NG}}$より，直線NGと直線MCは平行である。

［解　説］

空間ベクトルと四面体についての基本題です。