1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\, b,\, c$ を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

4

解答解説のページへ

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

5

解答解説のページへ

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき, (＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

6

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

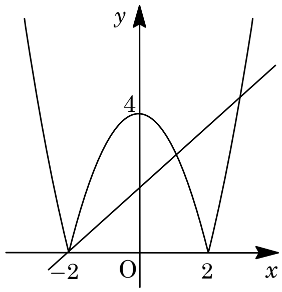
(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$

1

問題のページへ



(1)　$C: y=|x^2-4|$ に対して,

$y=x^2-4$　$(x\leqq -2,\ 2\leqq x)$ ………①

$y=-x^2+4$　$(-2<x<2)$ ………②

また, $l: y=ax+b$ ……③が点 $(-2,\ 0)$ を通ることより,

$-2a+b=0$, $b=2a$

ここで, ②より $y'=-2x$ となり, $x=-2$ のとき $y'=4$ から, l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は, $0<a<4$ である。

よって, 求める a, b の条件は, $b=2a$ $(0<a<4)$ である。

(2)　l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は, l と x 軸の交点に注目して,

(i)　l が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　(1)より, $b=2a$ $(0<a<4)$

(ii)　l が点 $(2,\ 0)$ を通るとき　(1)と同様に, $2a+b=0$ より $b=-2a$

そして, ②より $x=2$ のとき $y'=-4$ から, l の傾き a の範囲が $-4<a<0$ となり, まとめると, $b=-2a$ $(-4<a<0)$ である。

(iii) l が点 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2<x<2$ のときは, l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x<-2$, $2<x$ のとき, および x 軸と交点をもたないときは, l と C が $-2<x<2$ で接するときである。

②③を連立して, $-x^2+4=ax+b$ より, $x^2+ax+b-4=0$ ………④

④が $-2<x<2$ に重解をもつことより,

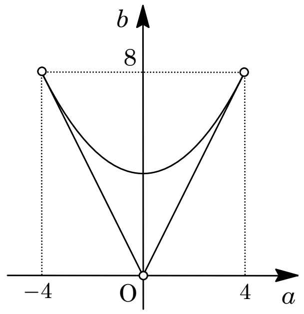
$D=a^2-4(b-4)=0$, $-2<-\dfrac{a}{2}<2$

よって, $b=\dfrac{a^2}{4}+4$ $(-4<a<4)$ となる。

このとき, ①と③は 2 交点をもつ。

(i)〜(iii)より, 点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の実線部になる。

ただし, 原点と 2 点 $(\pm 4,\ 8)$ は含まない。



［解　説］

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き, それをもとに計算をしています。

2

問題のページへ

(1)　6 枚のカードから無作為に 3 枚のカードを取り出す ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通りが同様に確からしいとする。このとき，与えられた条件で，取り出したカードに書かれた数と得点との関係を列挙すると右表のようになる。

カード	得点	カード	得点
1, 2, 3	2	0, 1, 2	3
1, 2, 4	$\frac{7}{3}$	0, 1, 3	4
1, 2, 5	$\frac{8}{3}$	0, 1, 4	5
1, 3, 4	$\frac{8}{3}$	0, 1, 5	6
1, 3, 5	3	0, 2, 3	5
1, 4, 5	$\frac{10}{3}$	0, 2, 4	6
2, 3, 4	3	0, 2, 5	7
2, 3, 5	$\frac{10}{3}$	0, 3, 4	7
2, 4, 5	$\frac{11}{3}$	0, 3, 5	8
3, 4, 5	4	0, 4, 5	9

さて, A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し，双方とも得点が 3 点となるのは,

(i)　A 君，B 君ともに 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii)　A 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{1}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{2}{400}$

(iii) B 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{2}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{2}{400}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{400}+\frac{2}{400}+\frac{2}{400}=\frac{1}{80}$ となる。

(2)　(1)の表より，得点が 2，8，9，$\frac{7}{3}$，$\frac{11}{3}$ となる確率は $\frac{1}{20}$ ずつ，得点が 4，5，6，7，$\frac{8}{3}$，$\frac{10}{3}$ となる確率は $\frac{2}{20}$ ずつ，得点が 3 となる確率が $\frac{3}{20}$ である。

これより, A 君と B 君が同じ得点になる確率は,

$$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}\times 5+\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}\times 6+\frac{3}{20}\times\frac{3}{20}=\frac{19}{200}$$

すると, A 君の得点が B 君の得点より大きい確率は, A 君と B 君の対等性より,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)=\frac{181}{400}$$

次に, A 君の得点が B 君の得点より大きく，しかも A 君の得点が整数でないとき, A 君の得点で場合分けをすると,

(i)　A 君が $\frac{7}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{7}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii)　A 君が $\frac{8}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{8}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{4}{400}$

(iii) A 君が $\frac{10}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{10}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{7}{20}=\frac{14}{400}$

(iv) A 君が $\frac{11}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{11}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{400}$

(i)〜(iv)より，この確率は，$\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{7}{100}$ となる。

以上より，A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない条件付き確率は，

$$\frac{7}{100} \div \frac{181}{400} = \frac{28}{181}$$

［解　説］

センター試験でよく見られる数え上げタイプの確率の基本問題です。20 通りの場合を書き上げて準備することがすべてです。

3　　問題のページへ

(1)　a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とするとき，$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつ条件は，k を 0 以上の整数として，

$$b^2-4ac=k^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①から $b^2 \geqq 4ac \geqq 8$ となり，$b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ である。

(i)　$b=3$ のとき　①より $9-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 2)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ である。

(ii)　$b=4$ のとき　①より $16-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(0,\ 4)$，$(4,\ 3)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ である。

(iii)　$b=5$ のとき　①より $25-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 6)$，$(9,\ 4)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ である。

(iv)　$b=6$ のとき　①より $36-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(0,\ 9)$，$(4,\ 8)$，$(16,\ 5)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$ である。

(v)　$b=7$ のとき　①より $49-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(1,\ 12)$，$(9,\ 10)$，$(25,\ 6)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(5,\ 2)$，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ である。

(i)～(v)より，組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，$2+2+6+4+10=24$ である。

(2)　$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつとき，①から $x=\dfrac{-b\pm k}{2a}$ ……②となり，

(i)　$b=3$ のとき　②より $x=\dfrac{-3\pm 1}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 2$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(ii)　$b=4$ のとき　②より $x=\dfrac{-4\pm 2}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iii)　$b=5$ のとき　②より $x=\dfrac{-5\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，

(iii-i)　$x=\dfrac{-5\pm 1}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，$a=6$ のとき整数解をもたない。

(iii-ii)　$x=\dfrac{-5\pm 3}{2a}$ に対して，$a=1,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv)　$b=6$ のとき　②より $x=\dfrac{-6\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，

(iv-i)　$x=\dfrac{-6\pm 2}{2a}$ に対して，$a=2,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv-ii)　$x=\dfrac{-6\pm 4}{2a}$ に対して，$a=1,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v)　$b=7$ のとき　②より $x=\dfrac{-7\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(v-i)　$x=\dfrac{-7\pm 1}{2a}$ に対して，$a=2,\ 3,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，

$a=6$ のとき整数解をもたない。

(v-ii)　$x=\dfrac{-7\pm 3}{2a}$ に対して，$a=2,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v-iii)　$x=\dfrac{-7\pm 5}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3,\ 6$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(i)～(v)より，有理数解をもつものの，2 つとも整数解でない組 $(a,\ b,\ c)$ は,

$(6,\ 5,\ 1)$，$(6,\ 7,\ 2)$

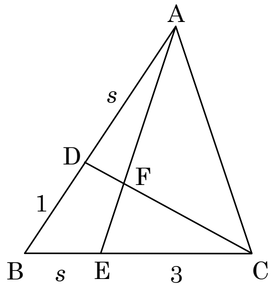
以上より，$ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，(1)から $24-2=22$ である。

［解 説］

2 次方程式の解を題材にした場合の数の問題です。注意力が要求されるため，かなりの時間が必要です。解答例では，(2)も工夫なく 24 通りを調べています。

4

問題のページへ



(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので,

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

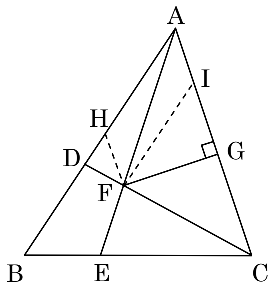
すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので,

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から,



$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと,

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\frac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より,

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより,

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\frac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

5　　問題のページへ

(1)　$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(＊)と(＊＊)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2)　γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z} \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i)　$\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii)　$\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(＊)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}\,|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1,\ k_2\ (k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}},\ \dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ である。

［解　説］

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

6　　問題のページへ

(1) $(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\,e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}a}\left(a\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - a\right\}$$

(2) $J(a,\ b,\ c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\}dx$

$$= -\frac{1}{2}I(a,\ b+c) + \frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3) $F(t) = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx)dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx\sin 6tx - \sin 4tx\sin 2tx - \sin 2tx\sin 6tx + \sin^2 2tx)dx$$

$$= 2J(1,\ 6t,\ 4t) - 2J(1,\ 4t,\ 2t) - 2J(1,\ 6t,\ 2t) + 2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 2t) + I(1,\ 6t) - I(1,\ 2t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 4t)$$

$$- I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

さて，$I(1,\ b) = \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - 1\right\}$ となるので，

$$|I(1,\ b)| \leqq \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right| + |-1|\right\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2} + 1\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ なので，k が自然数のとき $\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt) = 0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

［解 説］

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。