1　解答解説のページへ

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

2

解答解説のページへ

$p,\ q$ を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q\leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a を 3 で割り切れない正の整数とする。a を 3 で割ったときの商を b, 余りを c とする。次の問いに答えよ。

(1)　$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ を b を用いて表せ。

(2)　n を $n\geqq 2a-2$ を満たす整数とする。このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

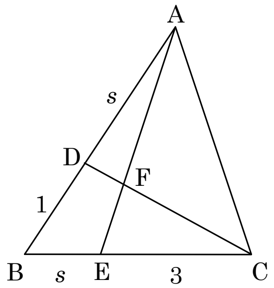
A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \ \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので,

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

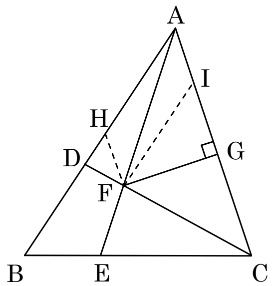
すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので,

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\ \ \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から,



$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと,

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より,

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより,

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $f(x)=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$ に対して，$-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる条件は，

(i) $-\dfrac{p}{2}<-1\ (p>2)$ のとき　$f(-1)=1-p+q\geqq 0$ より，$q\geqq p-1$

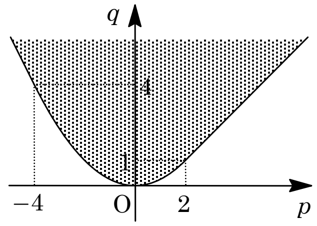
(ii) $-1\leqq -\dfrac{p}{2}\leqq 2\ (-4\leqq p\leqq 2)$ のとき　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q\geqq 0$ より，$q\geqq \dfrac{p^2}{4}$

(iii) $-\dfrac{p}{2}>2\ (p<-4)$ のとき

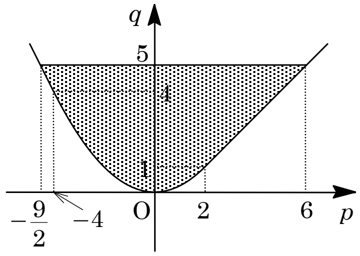
$f(2)=4+2p+q\geqq 0$ より，$q\geqq -2p-4$

(i)～(iii)より，領域 D は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まれる。



(2) D の $q\leqq 5$ を満たす部分は右図の網点部となり，その面積を S とすると，



$$S=\left(6+\frac{9}{2}\right)\cdot 5-\frac{1}{2}(4+5)\left(-4+\frac{9}{2}\right)$$
$$-\int_{-4}^{2}\frac{p^2}{4}dp-\frac{1}{2}(1+5)(6-2)$$
$$=\frac{105}{2}-\frac{9}{4}-\frac{1}{12}\Big[p^3\Big]_{-4}^{2}-12$$
$$=\frac{153}{4}-\frac{72}{12}=\frac{129}{4}$$

［解　説］

2 次関数の最大・最小に関する典型問題です。また，(2)の面積計算は，長方形や台形の面積公式を利用しています。

3　問題のページへ

(1)　3 で割り切れない正の整数 a を 3 で割ったときの商を b, 余りを c とすると,

$$a=3b+c\quad (c=1,\ 2)$$

さて，$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ から，$2(3b+2)+1=(3b+2)s+3t$ となり，

$$6b+5=(3b+2)s+3t\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$(s,\ t)=(1,\ b+1)$ は①を満たすので，$6b+5=(3b+2)\cdot 1+3(b+1)$

$$0=(3b+2)(s-1)+3(t-b-1),\ (3b+2)(s-1)=-3(t-b-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$3b+2$ と 3 は互いに素なので, k を整数として,

$$s-1=-3k,\ t-b-1=(3b+2)k$$

よって，$s=-3k+1$，$t=(3b+2)k+b+1$ となり，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ より，

$$-3k+1\geqq 0,\ (3b+2)k+b+1\geqq 0$$

すると，$k\leqq \dfrac{1}{3}$ かつ $k\geqq -\dfrac{b+1}{3b+2}=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3(3b+2)}$ となり，$b\geqq 0$ から，

$$-\frac{1}{2}\leqq k\leqq \frac{1}{3}$$

以上より，$k=0$ となり，①を満たす $(s,\ t)$ は $(s,\ t)=(1,\ b+1)$ のみである。

(2)　整数 $n\,(n\geqq 2a-2)$ に対し，$n=as+3t\ \cdots\cdots③$を満たす負でない整数 s, t が存在することを, c の値で場合分けをして示す。

(i)　$c=2$ のとき　$a=3b+2$ となり，$n\geqq 2(3b+2)-2=6b+2$

(i-i)　$n=6b+2$ のとき

③より $6b+2=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(1,\ b)$ で満たされる。

(i-ii)　$n=6b+3$ のとき

③より $6b+3=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(0,\ 2b+1)$ で満たされる。

(i-iii)　$n=6b+4$ のとき

③より $6b+4=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(2,\ 0)$ で満たされる。

(i-iv)　$n\geqq 6b+5$ のとき

l を自然数とし，$n=6b+2+3l$ のときは $(s,\ t)=(1,\ b+l)$，$n=6b+3+3l$ のときは $(s,\ t)=(0,\ 2b+1+l)$，$n=6b+4+3l$ のときは $(s,\ t)=(2,\ l)$ で満たされる。

(ii)　$c=1$ のとき　$a=3b+1$ となり，$n\geqq 2(3b+1)-2=6b$

(ii-i)　$n=6b$ のとき

③より $6b=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(0,\ 2b)$ で満たされる。

(ii-ii)　$n=6b+1$ のとき

③より $6b+1=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(1,\ b)$ で満たされる。

(ii-iii)　$n=6b+2$ のとき

③より $6b+2=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(2,\ 0)$ で満たされる。

(ii-iv)　$n \geqq 6b+3$ のとき

l を自然数とし，$n=6b+3l$ のときは $(s,\ t)=(0,\ 2b+l)$，$n=6b+1+3l$ のときは $(s,\ t)=(1,\ b+l)$，$n=6b+2+3l$ のときは $(s,\ t)=(2,\ l)$ で満たされる。

(i)(ii)より，整数 $n\,(n \geqq 2a-2)$ に対し，③を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在する。

［解 説］

不定方程式を題材とした整数問題です。設定がやや複雑ですが，特殊解を見つけるのは，さほど難しくはありません。ただ，上の解答例では，(2)が(1)とストレートにつながっていませんが。

4

問題のページへ

(1) 6 枚のカードから無作為に 3 枚のカードを取り出す ${}_6C_3=20$ 通りが同様に確からしいとする。このとき，与えられた条件で，取り出したカードに書かれた数と得点との関係を列挙すると右表のようになる。

カード	得点	カード	得点
1, 2, 3	2	0, 1, 2	3
1, 2, 4	$\frac{7}{3}$	0, 1, 3	4
1, 2, 5	$\frac{8}{3}$	0, 1, 4	5
1, 3, 4	$\frac{8}{3}$	0, 1, 5	6
1, 3, 5	3	0, 2, 3	5
1, 4, 5	$\frac{10}{3}$	0, 2, 4	6
2, 3, 4	3	0, 2, 5	7
2, 3, 5	$\frac{10}{3}$	0, 3, 4	7
2, 4, 5	$\frac{11}{3}$	0, 3, 5	8
3, 4, 5	4	0, 4, 5	9

さて, A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し，双方とも得点が 3 点となるのは,

(i) A 君，B 君ともに 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii) A 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{1}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{2}{400}$

(iii) B 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\frac{2}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{2}{400}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{400}+\frac{2}{400}+\frac{2}{400}=\frac{1}{80}$ となる。

(2) 整数でない A 君の得点で場合分けをすると,

(i) A 君が $\frac{7}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{7}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii) A 君が $\frac{8}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{8}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{4}{400}$

(iii) A 君が $\frac{10}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{10}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{7}{20}=\frac{14}{400}$

(iv) A 君が $\frac{11}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{11}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{400}$

(i)〜(iv)より，求める確率は，$\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{7}{100}$ となる。

［解　説］

センター試験でよく見られる数え上げタイプの確率の基本問題です。20 通りの場合を書き上げて準備することがすべてです。