1

解答解説のページへ

座標空間の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ -2,\ 5)$ をとる。点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な平面を α とする。

(1) 平面 α に関し，点 B と対称な点 C の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

変量 a のデータの値が，$a_k=\cos(2k\theta)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとする。ただし，$0<\theta<\pi$ である。

(1)　データの平均値 $\overline{a}$ は，$\overline{a}=\dfrac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$ で与えられることを示せ。

(2)　$n=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{20}$ のとき，データの標準偏差 s を求めよ。

3

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=(1-\sqrt{2})x^2+3\sqrt{2}-2$，$g(x)=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})$ を考える。放物線 $y=f(x)+g(x)$ を C_1 とし，円 $x^2+y^2=4$ の $y>0$ の部分を C_2 とする。

(1)　放物線 $y=f(x)$ と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a>-3$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ の閉区間 $[-3,\ a]$ における最大値と最小値の差が $\dfrac{11}{5}$ であるとき，a の値を求めよ。

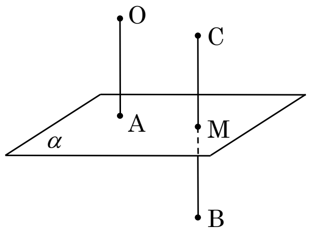
5

解答解説のページへ

$0<r<1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする。円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r \to 1-0} f(r)$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ 2)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な平面 α は,

$$(x-1)-2(y+2)+2(z-2)=0\,,\ x-2y+2z=9$$

さて，α に関して点 $\mathrm{B}(4,\ -2,\ 5)$ と対称な点 C に対し,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ （k は定数）とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4,\ -2,\ 5)+k(1,\ -2,\ 2)$$
$$=(4+k,\ -2-2k,\ 5+2k)$$

これより，線分 BC の中点 M は $\left(\dfrac{4+4+k}{2},\ \dfrac{-2-2-2k}{2},\ \dfrac{5+5+2k}{2}\right)$，すなわち $\mathrm{M}\left(4+\dfrac{k}{2},\ -2-k,\ 5+k\right)$ が平面 α 上にあることより,

$$\left(4+\frac{k}{2}\right)-2(-2-k)+2(5+k)=9,\ \frac{9}{2}k=-9$$

よって，$k=-2$ から，$\mathrm{C}(2,\ 2,\ 1)$ となる。

(2)　(1)から，$\mathrm{BC}=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=6$ となり，また $\mathrm{M}(3,\ 0,\ 3)$ から,

$$\mathrm{AM}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$$

ここで，直線 OA と直線 BC はともに平面 α に垂直なので，点 O と直線 BC との距離は線分 AM の長さに等しくなり,

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$$

［解　説］

空間図形についての基本的な問題です。(1)の解法はいろいろ考えられますが，解答例では平面の方程式を利用しています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　変量 a のデータの値が $a_k=\cos(2k\theta)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，平均値 $\overline{a}$ は，

$$\overline{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)$$

すると，$n\overline{a}=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)$ となり，

$$2n\overline{a}\sin\theta=\sum_{k=1}^{n}2\cos(2k\theta)\sin\theta=\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta\}$$
$$=\sin(2n+1)\theta-\sin\theta$$

よって，$\overline{a}=\frac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$ となる。

(2)　$\overline{a^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(2k\theta)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\{1+\cos(4k\theta)\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$

ここで，$\overline{b}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$ とおくと $n\overline{b}=\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$ となり，(1)と同様にして，

$$2n\overline{b}\sin 2\theta=\sum_{k=1}^{n}2\cos(4k\theta)\sin 2\theta=\sum_{k=1}^{n}\{\sin(4k+2)\theta-\sin(4k-2)\theta\}$$
$$=\sin(4n+2)\theta-\sin 2\theta$$

よって，$\overline{a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\overline{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n\sin 2\theta}\{\sin(4n\theta+2\theta)-\sin 2\theta\}$ となる。

さて，$n=10$，$\theta=\frac{\pi}{20}$ のとき，

$$\overline{a}=\frac{1}{20\sin\frac{\pi}{20}}\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{20}\right)-\sin\frac{\pi}{20}\right\}=\frac{-1}{20\sin\frac{\pi}{20}}\left(\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{\pi}{20}\right)=-\frac{1}{10}$$

$$\overline{a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{40\sin\frac{\pi}{10}}\left\{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{10}\right)-\sin\frac{\pi}{10}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{40\sin\frac{\pi}{10}}\left(\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}$$

すると，データの標準偏差 s は，

$$s=\sqrt{\overline{a^2}-(\overline{a})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{7}{10}$$

［解　説］

データの平均値と標準偏差についての問題です。(1)は，問題文にほのめかされていますが，積和公式を利用した有名な方法です。他には，ド・モアブルの定理と等比数列の和を組み合わせる方法も考えられますが。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(1-\sqrt{2})x^2+3\sqrt{2}-2$ に対し，放物線 $y=f(x)=(1-\sqrt{2})x^2+3\sqrt{2}-2$ と $C_2: x^2+y^2=4\ (y>0)$ の共有点は，2 式を連立して，

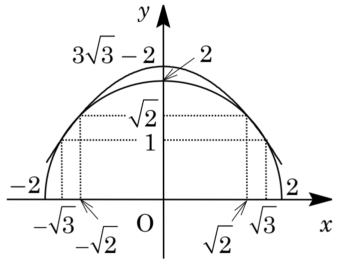
$$y=(1-\sqrt{2})(4-y^2)+3\sqrt{2}-2=0,\ (\sqrt{2}-1)y^2-y+(2-\sqrt{2})=0$$

すると，$y^2-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2}=0$ から，

$$(y-1)(y-\sqrt{2})=0$$

よって，$y=1,\ \sqrt{2}$ （ともに $y>0$ を満たす）

$y=1$ のとき $x^2=4-1=3$ から $x=\pm\sqrt{3}$，$y=\sqrt{2}$ のとき $x^2=4-2=2$ から $x=\pm\sqrt{2}$ となるので，共有点の座標は，$(\pm\sqrt{3},\ 1)$，$(\pm\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ である。



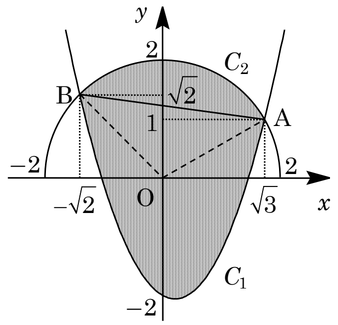
(2)　$g(x)=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})$ に対し，$C_1: y=f(x)+g(x)$ とする。

ここで，$h(x)=f(x)+g(x)=(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})x^2-(3-\sqrt{6})x-2$ とおくと，

$$h(\sqrt{3})=f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=1+0=1$$

$$h(-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})+g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$$

これより，C_1 と C_2 は $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 1)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ を共有点としてもち，しかも $h(x)$ の x^2 の係数は正で，$h(0)=-2$ から，C_1 と C_2 とで囲まれた部分は，右図の網点部のようになる。そして，網点部の線分 AB の上側の面積を S_1，下側の面積を S_2 とおく。



まず，線分 OA, OB と x 軸の正の部分のなす角は，それぞれ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ であり，

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{7}{12}\pi$$

ここで，$\sin\dfrac{7}{12}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{7}{12}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{6}\pi-2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{7\pi-3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{6}$$

また，直線 AB の方程式を $y=mx+n$ とおくと，

$$S_2=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\{(mx+n)-h(x)\}dx=-(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})dx$$

$$=\frac{1}{6}(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3=\frac{1}{6}(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(9\sqrt{3}+11\sqrt{2})$$

$$=\frac{5+9\sqrt{3}+11\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}$$

以上より，C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積 S_1+S_2 は，

$$\frac{7\pi-3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{6}+\frac{5+9\sqrt{3}+11\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}=\frac{7\pi+5+8\sqrt{2}+9\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$$

［解 説］

定積分と面積の問題です。(1)が(2)の巧みな誘導になっています。ただ，最後の数値計算は力ずくですが。

4

問題のページへ

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$

ここで，$f'(x)=0$ の解は $x=-2\pm\sqrt{5}$ から，$x\geqq -3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-2+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

さて，$f(-3)=-\dfrac{1}{10}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると，$a>-3$ のとき，$-3\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最小値は $-\dfrac{1}{10}$ である。

条件より，最大値と最小値の差が $\dfrac{11}{5}$ から，$-3\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値は $-\dfrac{1}{10}+\dfrac{11}{5}=\dfrac{21}{10}$ となるので，$f(x)=\dfrac{21}{10}$ すなわち $\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{21}{10}$ を計算すると，

$$21(x^2+1)=10(x+2)\,,\ 21x^2-10x+1=0\,,\ (7x-1)(3x-1)=0$$

よって，$x=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{3}$ となり，$f\left(\dfrac{1}{7}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{21}{10}$ である。

ここで，$\dfrac{1}{7}<-2+\sqrt{5}<\dfrac{1}{3}$ に注意すると，求める a の値は $a=\dfrac{1}{7}$ である。

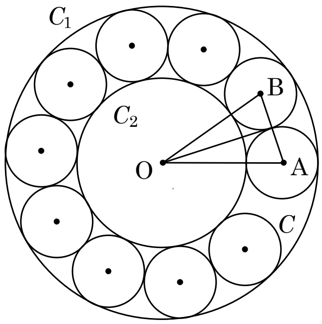
［解 説］

微分と増減についての基本的な問題です。解答例では省略しましたが，グラフを念頭において処理をしています。

5

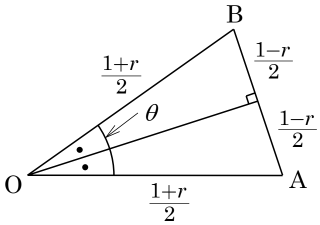
問題のページへ

ともに中心が O である半径 1 の円 C_1 と半径 r $(0<r<1)$ の円 C_2 に対し，円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円を C とする。そして，C のどの円も共有点の個数が 1 以下として，右図のようにできるだけたくさん描く。このとき，C の個数を n とする。



ここで，隣接する C の中心 A，B に対し，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，$n\theta \leqq 2\pi$ かつ $(n+1)\theta > 2\pi$ より，

$$\frac{2\pi}{\theta}-1<n\leqq\frac{2\pi}{\theta}\ \cdots\cdots\cdots①$$



そして，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{1+r}{2}$ で，C の半径は $\dfrac{1-r}{2}$ より，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1-r}{1+r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

このとき，C の円周の長さの総和 $f(r)$ は，

$$f(r)=2\pi\cdot\frac{1-r}{2}\cdot n=n\pi(1-r)\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$(1+r)\sin\dfrac{\theta}{2}=1-r$ となり，$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r=1-\sin\dfrac{\theta}{2}$ から，$r=\dfrac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

③に代入すると，$f(r)=n\pi\left(1-\dfrac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)=2n\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$ となり，①から，

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{2\pi}{\theta}-1\right)<f(r)\leqq 2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$r\to 1-0$ のとき，②から $\theta\to 0$ となり，

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta}=2\pi^2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\to 2\pi^2$$

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{2\pi}{\theta}-1\right)=2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta}-2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\to 2\pi^2$$

したがって，④から，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0}f(r)=2\pi^2$ である。

［解 説］

興味深い内容の図形と極限の問題です。ポイントは，①②③をまとめて $f(r)$ の評価式を作ることです。