

2024 入試対策
2次数学ランドマーク

積分法35題

理系 26か年

1998 - 2023

外林 康治 編著

電送数学舎

積分法

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 関数 $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1} dt$ について次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (2) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (3) $f(x)$ の最大値を求めよ。

[1998 筑波大]

2 (1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ のとき、 $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ。

- (2) (1)の $f(x)$, $g(x)$ に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a)$$

[1998 東北大]

3 2以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-1 P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。

[1999 東京工大]

4 (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0 , b_0 , a_1 , b_1 について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

- (2) n 個の自然数 x_1, x_2, \dots, x_n は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[1999 京都大]

5 次を示せ。

- (1) $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$

[2000 金沢大]

6 $a > 0, t > 0$ に対して定積分 $S(a, t) = \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx$ を考える。

(1) a を固定したとき、 t の関数 $S(a, t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。 [2001 東京工大]

7 $f(t)$ を連続関数、 x を実数として、関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$$

(1) $f(t) = e^t$ のとき、関数 $g(x)$ の増減を調べ、 $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、 $e = 2.71828 \dots$ は自然対数の底である。

(2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で、その逆関数も微分可能とし、 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ とおく。このとき、 $g(x)$ は $x = a$ で最小値をとることを証明せよ。 [2001 岡山大]

8 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \quad [2001 京都市大]$$

9 関数 $f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3$ を考える。 n, k を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n \geq 2$ とする。

(1) n を固定する。 $2 \leq k \leq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また、 k が $1 \leq k \leq 3n$ の範囲を動くとき、 $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2) (1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$ を求めよ。

[2001 大阪大]

10 n を 2 以上の整数とし、 $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt dt$ ($x \geq 0$) と定める。

(1) $n = 2$ のとき、 $I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2 - 1}$ であるならば、 n は偶数であることを証明せよ。

[2002 千葉大]

11 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x, y に対して、不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ。ここで \log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で、 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ をみたす。このとき、不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002 九州大]

12 n を自然数とする。 $n+1$ 項の等差数列 x_0, x_1, \dots, x_n と等比数列 y_0, y_1, \dots, y_n が、 $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$, $1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$ を満たすとし、 $P(n), Q(n), R(n), S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n), \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n), \lim_{n \rightarrow \infty} R(n), \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004 東北大]

13 次の問いに答えよ。

(1) $f(x), g(x)$ を連続な偶関数、 m を正の整数とするととき、

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 m, n が $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき、

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx$$

を証明せよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx$ を求めよ。

[2004 東京工大]

14 多項式の列 $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ が, $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = x$,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$ であることを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $|x| \leq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき, $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

[2004 名古屋大]

15 $x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は, 実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち, 任意の実数 a に対して, $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。このとき, 定積分 $\int_8^{27} g(x) dx$ を求めよ。

[2006 東京大]

16 以下の問いに答えよ。

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x, a に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1)を利用して, 次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数とする。

[2007 東京大]

17 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x に対して, 不等式 $\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を, $a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[2008 広島大]

18 $f(x)$ を整式で表される関数とし、 $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$ とおく。任意の実数 x について、 $x(f(x)-1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$ が成り立つとする。

- (1) $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ は定数または1次式であることを示せ。
- (3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

[2009 筑波大]

19 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $f(0)$ の値を求めよ。
- (3) 条件 $a_1 = f(0)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2010 熊本大]

20 (1) すべての自然数 k に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

[2010 東京大]

21 自然数 n に対し、 $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} dx$, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく。このとき

以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の不等式を示せ。 $\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$
- (2) $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

[2011 東京医歯大]

22 n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$ を示せ。

[2012 東京工大]

23 微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

[2013 新潟大]

24 n, m を 0 以上の整数とし、 $I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$ とおく。このとき、以下

の問いに答えよ。

(1) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式 $I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ を示せ。

(3) 次の式 $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \dots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし

$0! = 1$ とする。

[2014 千葉大]

25 自然数 n に対して、 $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、不等式 $\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して、 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 [2014 新潟大]

26 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad g(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$ を満たす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

- (2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad h(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \quad [2015 東京大]$$

27 $a > 0$ に対し、関数 $f(x)$ が、 $f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$ を満たすとする。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $0 < a \leq 2\pi$ において、 $g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016 北海道大]

28 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) a と $f(0) + f(1)$ の値を求めよ。
- (2) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくと、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

[2017 東京医歯大]

29 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし、 $(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$ を示せ。
- (2) $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$ の和を求めよ。

[2018 新潟大]

30 以下の問いに答えよ。ただし、 \log は自然対数、 e はその底とする。

- (1) b を実数とする。関数 $f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

- (2) $a \leq b$ を満たす正の実数 a, b に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。 $I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

このとき極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$ を用いてもよい。

[2019 大阪大]

31 xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し、

$$0 < x < n, 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式 $L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$ を示せ。 [2020 熊本大]

32 n を自然数とし、 t を $t \geq 1$ を満たす実数とする。

(1) $x \geq t$ のとき、不等式 $-\frac{(x-t)^2}{2} \leq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $-\frac{1}{6n^3} \leq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x dx - \frac{1}{n} \log t - \frac{1}{2tn^2} \leq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - pn) = q$ を満たすような実数 p, q の値を求めよ。 [2021 大阪大]

33 p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は、すべての実数 x について $f(x+p) = f(x)$ を満たし、 $0 \leq x \leq p$ において、 $f(x) = \frac{p}{2} - \left|x - \frac{p}{2}\right|$ であるとする。また、

$$I_k = \int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x} f(x) dx \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $\frac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

(3) n は自然数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{pn} e^{-x} f(x) dx$ を求めよ。 [2022 信州大]

34 次の問いに答えよ。

- (1) a, b は実数とし, $f(x)$ は a, b が属する开区間で定義された関数とする。 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき, 次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx = (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\int_a^b f(x)dx$$

- (2) t を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$0 \leq \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2}(\log t + \log(t+1)) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)$$

- (3) 次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$$a_n = \log(n!) - n \log n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [2023 \text{ 大阪工大}]$$

- 35** (1) 正の整数 k に対し, $A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$ とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

- (2) 正の整数 n に対し, $B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$ とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ。

[2023 東京大]

積分法

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 筑波大]

$$(1) \quad g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \text{ とおくと, つねに } g(t) > 0 \text{ より,}$$

$$2x + 1 > x \quad (x > -1) \text{ のとき, } f(x) > 0$$

$$2x + 1 < x \quad (x < -1) \text{ のとき, } f(x) < 0$$

よって, $f(x) = 0$ となるのは, $2x + 1 = x$ のときだけである。

すなわち, $x = -1$

$$(2) \quad f'(x) = g(2x+1) \cdot (2x+1)' - g(x) = \frac{2}{(2x+1)^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{-x(x+2)}{(2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x(x+2) = 0 \text{ から } x = 0, -2$$

- (3) (1)より, $f(x)$ の最大値は $x > -1$ に存在するので, $x > -1$ における $f(x)$ の値の増減を調べると, 右表のようになる。

x	-1	...	0	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	

$$\text{すると, 最大値は } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \text{ と}$$

なり, ここで $t = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと,

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

[解説]

逆三角関数は高校数学の範囲外なので, 直接的な積分計算を回避して, 設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで, 本問の出来は決まります。

2

[1998 東北大]

(1) $y = f(x)$ を同値変形すると、 $x = g(y)$ となることより、

$$y = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ から, } (e^x + 1)(1 - y) = 1$$

$$e^x = -1 + \frac{1}{1 - y} = \frac{y}{1 - y}, \quad x = \log \frac{y}{1 - y}$$

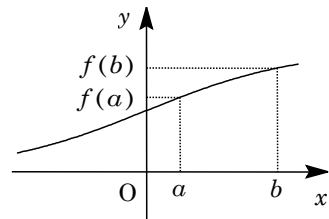
$$\text{よって, } g(y) = \log \frac{y}{1 - y} \text{ となり, } g(x) = \log \frac{x}{1 - x}$$

(2) $x = f(t)$ とおくと $dx = f'(t)dt$, また $x = f(a)$ のとき $t = a$, $x = f(b)$ のとき $t = b$ となる。

さらに、 $y = f(x)$ の逆関数が $y = g(x)$ から、 $g(f(x)) = x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = \int_a^b g(f(t)) f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt = \int_a^b x f'(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } & \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx \\ &= \int_a^b \{ f(x) + x f'(x) \} dx \\ &= \int_a^b (x f(x))' dx \\ &= [x f(x)]_a^b = b f(b) - a f(a) \end{aligned}$$



[解説]

(2)の証明は、まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが、これでは証明とは言えません。積分の第2項の積分区間を $[a, b]$ に変更することから、置換の式を見つけました。

3

[1999 東京工大]

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと、部分積分により、

$$I_n = [t^n e^t]_0^1 - n \int_0^1 t^{n-1} e^t dt = e - nI_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!} = (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{(2k+1)!} \\ &= (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

証明すべき式 $\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)! \cdots \cdots (*)$ は、②より、

$$(*) \Leftrightarrow \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さらに、 $\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} = J_n$ とおくと、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow J_n = 1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、①から、

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e - (2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{I_{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e - 2nI_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e}{(2n)!} + \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= J_n + e \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!} \right) \end{aligned}$$

$$n \geq 2 \text{ で, } J_n = J_1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right)$$

$$\text{ここで, } J_1 = I_1 = \int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1$$

よって、 $n \geq 2$ で④は成立するので、(*)は成立する。

[解 説]

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると、直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

4

[1999 京都大]

$$(1) \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} - \frac{a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2}{b_0^2+1} = \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_0^2+1}$$

$$= \frac{(b_1^2 - a_1^2)(b_0^2 - a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$$0 < a_0 < b_0, \quad 0 < a_1 < b_1 \text{ より, } \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

(2) まず, $1 \leq i < j \leq n$ とし, $x_i = y_j, x_j = y_i, x_k = y_k (k \neq i, k \neq j)$ とすると, 条件より, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

さらに $x_i > x_j$ のとき, (1) より

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1} = \frac{y_i^2}{i^2+1} + \frac{y_j^2}{j^2+1}$$

すると, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{k^2+1}$ となり, 同様にして $1 \leq p < q \leq n$ で $x_p > x_q$ の

ときは, x_p の値と x_q の値を交換していくと, S_n の値は減少していく。よって, S_n の値が最小となるのは $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, すなわち $x_k = k$ のときである。

$$\text{以上より, } S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2+1} \right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とすると, $x > 0$ で

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ となり, } f(x) \text{ は}$$

単調に減少する。

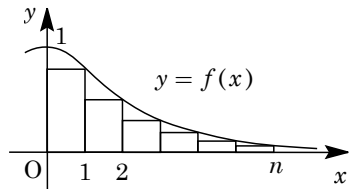
右図において, 面積を比較して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおき, $n = \tan \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると,

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\alpha d\theta = \alpha < \frac{\pi}{2} < \frac{3.2}{2} = \frac{8}{5} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } S_n > n - \frac{8}{5}, \text{ すなわち } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$



[解説]

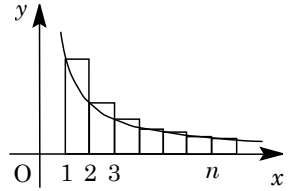
(2)の前半は, わかっているのにそれを表現するのが難しく, もどかしく感じてしまいます。87年に東大・理で同じ考え方をしている問題が出ています。

5

[2000 金沢大]

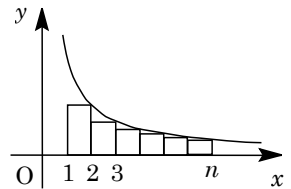
(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) とすると, $f(x)$ は減少関数より,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$



(2) (1)と同様にして, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n f(x) dx = \log n$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \cdots \cdots \textcircled{2}$$



①②より, $\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \frac{1}{\log n} + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて $n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1 = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} \rightarrow 0$ から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$$

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log n} + 1 \right) = 1$ となるので, ③より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) まず, $\int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \cdots \cdots \textcircled{4}$

$k \leq x \leq k+1$ において, $\frac{|\sin \pi x|}{k+1} \leq \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| \leq \frac{|\sin \pi x|}{k}$ より,

$$\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \leq \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \cdots \cdots \textcircled{5}$$

ここで, $y = x - k$ とおくと,

$$\int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx = \int_0^1 |\sin \pi(y+k)| dy = \int_0^1 |\sin \pi y| dy = \int_0^1 \sin \pi y dy \\ = -\frac{1}{\pi} [\cos \pi y]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において, $k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

④より, $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

(2)より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$

[解 説]

金沢大・理系の入試問題には、よく練られた難問が 1 題出題されますが、今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限值をどのように使うかということを考えていると、謎解きの楽しみが味わえます。

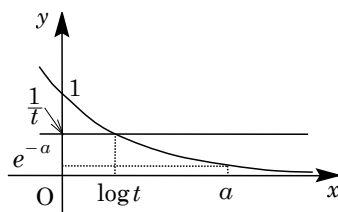
6

[2001 東京工大]

(1) (i) $\frac{1}{t} \geq 1$ ($0 < t \leq 1$) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$

$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii) $e^{-a} \leq \frac{1}{t} < 1$ ($1 < t \leq e^a$) のとき $e^{-x} = \frac{1}{t}$ の解は, $x = \log t$ より,

$$S(a, t) = \int_0^{\log t} \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t} \log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii) $\frac{1}{t} < e^{-a}$ ($t > e^a$) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると, $0 < t \leq 1$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = -\frac{a}{t^2} < 0$ となり, $S(a, t)$ は単調に減少し, $t > e^a$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{a}{t^2} > 0$ となり, $S(a, t)$ は単調に増加する。また, $1 < t \leq e^a$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{2}{t^2} \log t - \frac{2}{t^2} - \frac{a-2}{t^2} = \frac{2 \log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = 0$ の解は, $t = e^{\frac{a}{2}}$ であり, $S(a, t)$ の増減は右表のようになる。さらに, $S(a, t)$ は $t=1$, $t=e^a$ において連続なので, $t=e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり,

$$m(a) = S\left(a, e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

t	1	...	$e^{\frac{a}{2}}$...	e^a
$\frac{dS(a, t)}{dt}$		-	0	+	
$S(a, t)$		↘		↗	

(2) (1)より, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$ ここで, $-\frac{a}{2} = b$ とおくと, $a \rightarrow 0$ のとき $b \rightarrow 0$ となり,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

[解 説]

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は e の定義を適用するものです。