

2024 入試対策
2次数学ランドマーク

積分の応用38題

理系 26か年

1998 — 2023

外林 康治 編著

電送数学舎

積分の応用

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる。四角錐 $PABCD$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[1998 東京大]

2 xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても、平面 $z = a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0, 0, a)$, $(1, 0, a)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a)$ を頂点とする正三角形である。また、どのような a に対しても、平面 $y = a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0, a, 0)$, $(0, a, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $(1, a, \frac{1}{\sqrt{3}})$ を頂点とする正三角形である。

このとき、立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

[1999 大阪大]

3 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で、中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で、 xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で、その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。 $0 < r \leq \sqrt{2}$ とし、円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

[2001 九州大]

4 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし、関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし、 $\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正、負、0 に従って正、負、0 の値をとるものとする。また、点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $Q(\alpha(t), \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b ($a < b$) まで変化するとき、点 P , Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1 , L_2 とする。 $L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

[2001 九州大]

5 (1) $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について、導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) で定義される曲線の、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ。

[2002 京都大]

6 xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 ま
で動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

- (1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。
(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

[2003 東北大]

7 xyz 空間において、平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし、点
 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に、平面 $z=0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H 、平面 $z=1$ 上の点
 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。 H と K を 2 つの底面とする円柱を
 B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 $t = 1 - \cos \theta$ のとき、 $S(t)$ を θ で表せ。
(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ。

[2003 東京大]

8 $f(x)$ は $x \geq 0$ で連続で、 $f(0) = 0$ かつ $x > 0$ において $f'(x) > 0$ を満たすとする。
 $t > 0$ に対して、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわ
りに 1 回転してできる立体の体積を $X(t)$ 、曲線 $y = f(x)$ と y 軸および直線 $y = f(t)$
とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする。ま
た、 $X(0) = Y(0) = 0$ とする。このとき、次を示せ。

- (1) $X'(t) = \pi f(t)^2$, $Y'(t) = \pi t^2 f'(t)$ ($t > 0$) である。
(2) $f(x)$ が整式でかつ、すべての $t \geq 0$ に対して $X(t) = Y(t)$ が成り立つならば、
 $f(x) = x$ ($x \geq 0$) である。
(3) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ならば、 $X(t) = Y(t)$ ($t \geq 0$) である。

[2004 筑波大]

9 座標空間に定点 $A(1, 0, 0)$ をとる。点 $P(x, y, z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。 $k > 1$ である定数 k に対して、 $PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。
- (2) S のうちで、 $y \geq 0$ かつ $z = 0$ を満たす部分を C とする。 S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。
- (3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。 [2004 岡山大]

10 D を半径 1 の円盤、 C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。 D が次の条件 (a), (b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき、 D が通過する部分の体積を求めよ。

- (a) D の中心は C 上にある。
- (b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。 [2005 東京工大]

11 r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。 [2005 東京大]

12 座標平面において、原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と点 $Q(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。ただし、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ である。 l_1 と l_2 の交点を $R(\alpha, \beta)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 R の座標 α, β を θ の式で表せ。
- (2) θ を $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき、直線 $y = \sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006 岡山大]

13 xyz 空間に 3 点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき、平面 $z = t$ と、 $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2006 神戸大]

14 座標空間において、 $|x| \leq z^2$ を満たす点 (x, y, z) 全体からなる立体を R とする。点 $(0, 0, 1)$ を通り、 x 軸と平行な直線を l とする。 l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし、 R と C の共通部分を T とする。

(1) $-1 < h < 1$ を満たす定数 h に対して、点 $(0, 0, 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2) T の体積を求めよ。 [2006 筑波大]

15 xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし、 l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2007 東北大]

16 xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を l とする。

(1) l 上の点 $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り l と垂直な平面が、 xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。 l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。 [2009 東京工大]

17 a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし、曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)、 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。 [2010 京都市]

18 $0 < t < 3$ のとき、連立不等式

$$0 \leq y \leq \sin x, \quad 0 \leq x \leq t - y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と、そのときの $V(t)$ の値を求めよ。 [2010 東北大]

19 半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。 [2010 大阪大]

20 a を実数とする。円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 C の中心を $P(X, Y)$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) X, Y を a を用いて表せ。
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

[2011 東北大]

21 xyz 空間内の 3 点 $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, -1)$, $R(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える。 t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき、三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

- (1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。

[2011 熊本大]

22 $-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ とする。 xyz 空間内の平面 $z = 0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x, y, 0) \mid 1 \leq x \leq 2 + 4s, 1 \leq y \leq 2 - 3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

- (1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値、およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。
- (2) s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

[2011 名古屋大]

23 半径 1 の円を底面とする高さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし、直径を 1 つ取り AB とおく。 AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けると、体積の小さい方の部分を V とする。

- (1) 直径 AB と直交し、 O との距離が t ($0 \leq t \leq 1$) であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) V の体積を求めよ。

[2013 東北大]

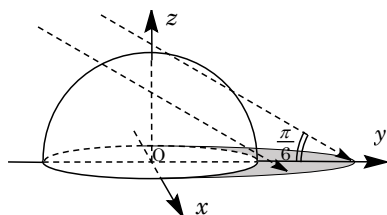
24 xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2013 大阪大]

25 空間内にある半径1の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており、その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

- (1) B の中心と l との距離を求めよ。
 (2) l のまわりに B を1回転してできる立体の体積を求めよ。 [2014 名古屋大]

26 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径1の球がある。右の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とすると、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。
 (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
 (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。 [2015 九州大]

27 座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。 P, Q は時刻0において、原点を出発する。 P は x 軸の正の方向に、 Q は x 軸の負の方向に、ともに速さ1で動く。その後、ともに時刻1で停止する。点 P, Q を中心とする半径1の球をそれぞれ A, B とし、空間で $x \geq -1$ の部分を C とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。
 (2) $V(t)$ の最大値を求めよ。 [2015 大阪大]

28 $a > 0$ とする。曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = a$ で囲まれた図形を、 y 軸のまわりに1回転してできる回転体を A とする。

- (1) A の体積 V を求めよ。
 (2) 点 $(t, 0)$ ($-a \leq t \leq a$) を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき、不等式 $S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$ を示せ。
 (3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ を示せ。 [2015 東京工大]

29 半直線 $l: y = x (x \geq 0)$, 放物線 $C: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。
- (2) $t \geq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $A(t)$ とするとき、 $A(t)$ を通り l に直交する直線と、放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。
- (3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を、半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016 信州大]

30 xyz 空間において、平面 $y = z$ の中で、 $|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1$, $0 \leq y \leq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。
この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016 京都大]

31 点 O を原点とする座標空間内で、1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また、点 $A(1, 0, 0)$ に対して、 $\angle AOP$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1) 点 Q が $(0, 0, 1)$ にあるとき、点 P の x 座標がとりうる値の範囲と、 θ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき、辺 OP が通過しうる範囲を K とする。 K の体積を求めよ。 [2017 東京大]

32 座標空間において、 O を原点とし、 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$ とする。 $\triangle OAB$ を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 OC 上にない点 $P(x, y, z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。 \overline{OH} と \overline{HP} を x, y, z の式で表せ。
- (2) $P(x, y, z)$ が L の点であるための条件は、 $z^2 \leq 2xy$ かつ $0 \leq x + y \leq 2$ であることを示せ。
- (3) $1 \leq a \leq 2$ とする。 L を平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leq x \leq 2\}$ の体積を求めよ。 [2018 神戸大]

33 媒介変数表示 $x = \sin t$, $y = (1 + \cos t)\sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。
- (2) C の凹凸を調べ、 C の概形を描け。
- (3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

[2019 神戸大]

34 正の整数 n に対し、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ とする。

- (1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし、点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき、小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

[2019 名古屋大]

35 $-2\pi \leq x \leq \pi$ のとき、関数 $f(x) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3} \right) + \frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を

考える。次の問いに答えよ。必要であれば、 $\pi^2 < 10$ を用いてよい。

- (1) $f(x)$ は閉区間 $[-2\pi, \pi]$ で増加することを示せ。
- (2) 开区間 $(-2\pi, \pi)$ で、つねに $f(x) > x$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について、定積分 $\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x) dx$ の値を求めよ。
- (4) $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、2 つの曲線

$$C_1: y = f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad C_2: y = f^{-1}(x) \quad (f(0) \leq x \leq f(\pi))$$

を考える。 C_1 , C_2 および直線 $x + y = f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2020 金沢大]

36 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における座標が

$$x = \frac{4 + 5\cos t}{5 + 4\cos t}, \quad y = \frac{3\sin t}{5 + 4\cos t}$$

であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P と原点 O との距離を求めよ。
- (2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^\pi \frac{dt}{5 + 4\cos t}$ を求めよ。

[2021 神戸大]

37 座標空間内の点 $A(0, 0, 2)$ と点 $B(1, 0, 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。 S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $PQ = 2$ を満たしながら動くとき、線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。 K の体積を求めよ。

[2022 東京大]

38 O を原点とする xyz 空間において、点 P と点 Q は次の 3 つの条件(a), (b), (c)を満たしている。

- (a) 点 P は x 軸上にある。
- (b) 点 Q は yz 平面上にある。
- (c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件(a), (b), (c)を満たしながらくまなく動くとき、線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

[2023 京都大]

積分の応用

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東京大]

平面 $z = k$ ($k \geq 0$) において、四角錐 $PABCD$ の切り口を、 $x \geq 0, y \geq 0$ に領域で考える。

平面 $z = k$ と z 軸との交点を R 、辺 AP との交点を Q とする。

$$RQ : OA = PR : PO \text{ より, } RQ : \sqrt{2} = (3 - k) : 3$$

$$RQ = \frac{\sqrt{2}}{3}(3 - k)$$

$$\text{ここで, } RQ \geq 1 \text{ とすると, } k \leq 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{よって, } 0 \leq k \leq \frac{3}{2}(2 - \sqrt{2})$$

さて、右の断面において、 RS と x 軸の正方向とのなす角を θ とする。

円柱 $x^2 + y^2 = 1$ の外部（または面上）と四角錐 $PABCD$ の内部（または面上）の共通部分を、平面 $z = k$ で切断した断面の面積を $S(k)$ とすると、 $RT = RQ \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{k}{3}$ より、

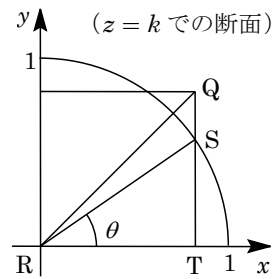
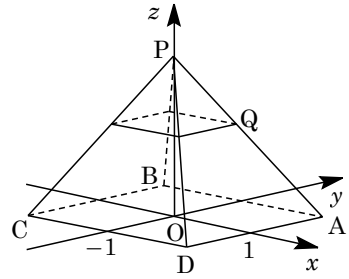
$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{3}\right) \left(1 - \frac{k}{3}\right) \tan \theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right\} \\ &= \left(1 - \frac{k}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) - \frac{\pi}{4} + \theta \\ &= \cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} + \theta \quad (\cos \theta = 1 - \frac{k}{3} \text{ より}) \end{aligned}$$

求める体積を V とすると、 $-\sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} dk$ より、

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})} S(k) dk = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta - \frac{\pi}{4} + \theta) 3 \sin \theta d\theta \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{\pi}{4} \sin \theta + \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 12 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{\pi}{4} \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 12 \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8} \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi \end{aligned}$$

[解 説]

空間では、 $x^2 + y^2 = 1$ が円柱を表すということがわからないと手も足もできませんが、それがクリアできれば、後は体積計算の基本です。上の解では z 軸に垂直に切りましたが、他の軸について切っても OK です。



2

[1999 大阪大]

立体 K を表す不等式は、

$$x \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, y \leq -\sqrt{3}(x-1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

立体 L を表す不等式は、

$$x \geq 0, z \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

立体 K と L の共通部分を平面 $x = k$ で切った断面で考える。また、その面積を $S(k)$ とおく。

$$\textcircled{2} \text{より, } k \geq 0, \frac{1}{\sqrt{3}}k \leq z \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

断面が存在する条件は、 $\frac{1}{\sqrt{3}}k \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}}$ より、 $k \leq 1$ となるので、 $0 \leq k \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$\textcircled{1} \text{より, } y \geq 0, y \leq \sqrt{3}k, y \leq -\sqrt{3}(k-1) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{より, } \sqrt{3}k \leq -\sqrt{3}(k-1) \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2}, \sqrt{3}k \geq -\sqrt{3}(k-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq 1$$

(i) $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$ のとき

$\textcircled{3}\textcircled{5}$ より $x = k$ で切った断面は右図のようになる。

$$\begin{aligned} S(k) &= \sqrt{3}k \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k \right) \\ &= -2k(k-1) \end{aligned}$$

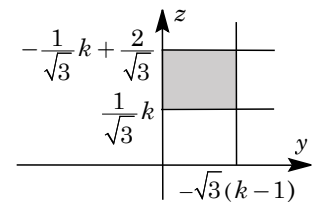
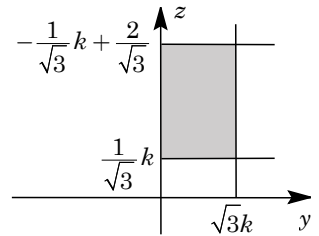
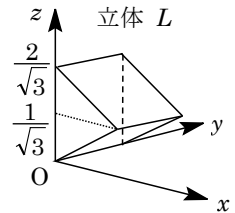
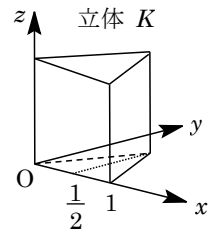
(ii) $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$ のとき

$\textcircled{3}\textcircled{5}$ より $x = k$ で切った断面は右図のようになる。

$$\begin{aligned} S(k) &= -\sqrt{3}(k-1) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k \right) \\ &= 2(k-1)^2 \end{aligned}$$

以上より、立体 K と L の共通部分の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} -2k(k-1)dk + \int_{\frac{1}{2}}^1 2(k-1)^2 dk = \left[-\frac{2}{3}k^3 + k^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \left[(k-1)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



[解説]

2 つの立体の共通部分の体積を求めるという以前からの頻出題の一つです。現行の課程では出題されなくなるという噂もありましたが、そうではありませんでした。

3

[2001 九州大]

- (1) 中心軸が x 軸で、断面が半径 r の円である円柱は、 $y^2 + z^2 \leq r^2$ ……①

また、中心軸が z 軸で、断面が右図のような 1 辺 $\frac{2\sqrt{2}}{r}$

の正方形である正四角柱は、

$$|x| + |y| \leq \frac{2}{r} \dots\dots\dots ②$$

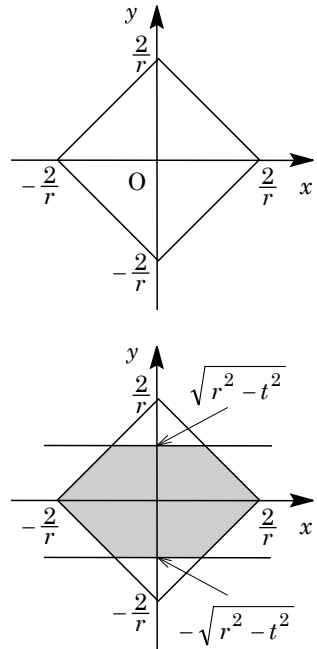
①②の共通部分を平面 $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で切ったときの切り口は、 $y^2 + t^2 \leq r^2$, $|x| + |y| \leq \frac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2 - t^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - t^2}, |x| + |y| \leq \frac{2}{r}$$

さて、 $0 < r \leq \sqrt{2}$ から、 $\frac{2}{r} \geq r \geq \sqrt{r^2 - t^2}$

よって、 $z = t$ での切り口は右図の網点部となり、その面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} - \sqrt{r^2 - t^2} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &= \frac{8}{r} \sqrt{r^2 - t^2} + 2t^2 - 2r^2 \end{aligned}$$



- (2) 共通部分 K が xy 平面に関して対称なので、

$$V(r) = 2 \int_0^r S(t) dt = 2 \int_0^r \left(\frac{8}{r} \sqrt{r^2 - t^2} + 2t^2 - 2r^2 \right) dt$$

ここで、 $\int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} dt = \pi r^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pi r^2$ より、

$$V(r) = \frac{16}{r} \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 + 2 \left[\frac{2}{3} t^3 - 2r^2 t \right]_0^r = 4\pi r - \frac{8}{3} r^3$$

- (3) $V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -4(2r^2 - \pi)$

右表より、 $0 < r \leq \sqrt{2}$ において、

$r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ のときに $V(r)$ は最大となる。そ

して、最大値は、

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi \sqrt{\pi}$$

r	0	...	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$...	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗		↘	

[解 説]

10 年も前になりますが、直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年も円柱と正四角柱でしたが、それにしても、この種類の問題はよく出題されます。

4

[2001 九州大]

(1) $P(t, f(t))$ における接線の傾きは $f'(t)$ より、 $\tan\theta(t) = f'(t)$ となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = f''(t), \quad \theta'(t) = f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より、 $f''(t) > 0$ なので $\theta'(t) > 0$ 、よって $\theta(t)$ はつねに増加する。

(2) ①より、接線の方角ベクトルは $(1, \tan\theta(t))$ とおけるので、下向きの法線ベクトルは $\vec{n} = (\tan\theta(t), -1)$ となる。

$$\text{すると、} |\vec{n}| = \sqrt{\tan^2\theta(t) + 1} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(t)}} = \frac{1}{\cos\theta(t)} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \cos\theta(t)\vec{n} = (t, f(t)) + \cos\theta(t)(\tan\theta(t), -1) \\ &= (t, f(t)) + (\sin\theta(t), -\cos\theta(t)) = (t + \sin\theta(t), f(t) - \cos\theta(t)) \end{aligned}$$

よって、 $\alpha(t) = t + \sin\theta(t)$ 、 $\beta(t) = f(t) - \cos\theta(t)$

(3) (1)より、 $1 + \{f'(t)\}^2 = 1 + \tan^2\theta(t) = \frac{1}{\cos^2\theta(t)}$ なので、

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}} dt = \int_a^b \frac{1}{\cos\theta(t)} dt$$

$$\begin{aligned} \text{(2)から、} \{ \alpha'(t) \}^2 + \{ \beta'(t) \}^2 &= \{ 1 + \cos\theta(t)\theta'(t) \}^2 + \{ f'(t) + \sin\theta(t)\theta'(t) \}^2 \\ &= \{ 1 + \cos\theta(t)\theta'(t) \}^2 + \{ \tan\theta(t) + \sin\theta(t)\theta'(t) \}^2 \\ &= \{ 1 + \cos\theta(t)\theta'(t) \}^2 \{ 1 + \tan^2\theta(t) \} = \frac{\{ 1 + \cos\theta(t)\theta'(t) \}^2}{\cos^2\theta(t)} \end{aligned}$$

$$L_2 = \int_a^b \sqrt{\frac{\{ 1 + \cos\theta(t)\theta'(t) \}^2}{\cos^2\theta(t)}} dt = \int_a^b \frac{1 + \cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)} dt$$

$$\text{よって、} L_2 - L_1 = \int_a^b \frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)} dt = \int_a^b \theta'(t) dt = [\theta(t)]_a^b = \theta(b) - \theta(a)$$

[解 説]

ていねいな誘導がついた、よく練られた問題です。(3)の結論は予想以上に簡明なものでした。

5

[2002 京都大]

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ に対して,

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 曲線 $r = \theta$ 上の点を (x, y) とすると, $x = r \cos \theta = \theta \cos \theta$, $y = r \sin \theta = \theta \sin \theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = (\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2 = 1 + \theta^2$$

曲線 $r = \theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを l とすると,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \left[\theta \sqrt{1+\theta^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \theta \cdot \frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \\ &= \pi \sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta = \pi \sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \left(\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \right) d\theta \\ &= \pi \sqrt{1+\pi^2} - l + \left[\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\pi = \pi \sqrt{1+\pi^2} - l + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \\ 2l &= \pi \sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } l = \frac{1}{2} \pi \sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{2} \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

[解 説]

(2)の部分積分による計算は有名なものですが, 経験がないと無理でしょう。

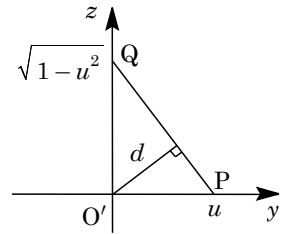
6

[2003 東北大]

- (1) 平面 $x = u$ 上で考えて、点 $O'(u, 0, 0)$ と線分 PQ との距離を d とすると、

$$PQ \times d = O'P \times O'Q$$

$$PQ = \sqrt{u^2 + (1-u^2)} = 1 \text{ より, } d = u\sqrt{1-u^2}$$



- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を、平面 $x = u$ で切断したときの切り口は、線分 PQ を x 軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を $S(u)$ とおく。

さて、 $u \leq \sqrt{1-u^2}$ とすると、 $0 \leq u \leq 1$ から $u^2 \leq \frac{1}{2}$ なので、 $0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

また、 $u \geq \sqrt{1-u^2}$ とすると、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1$ である。

- (i) $0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$S(u) = \pi(\sqrt{1-u^2})^2 - \pi d^2 = \pi\{1-u^2 - u^2(1-u^2)\} = \pi(1-2u^2+u^4)$$

- (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1$ のとき

$$S(u) = \pi u^2 - \pi d^2 = \pi\{u^2 - u^2(1-u^2)\} = \pi u^4$$

- (i)(ii)より、求める立体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1-2u^2+u^4) du + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi u^4 du \\ &= \pi \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \pi \left[\frac{1}{5}u^5 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{5} \right) \pi \end{aligned}$$

[解説]

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が、 $O'P$ か $O'Q$ かで場合分けをします。

7

[2003 東京大]

- (1) 円錐 A を平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切断したとき、その切り口の円の半径を r とすると、

$$r : 2 = 1 - t : 1, \quad r = 2(1 - t)$$

よって、 $z = t$ 上で、この円の方程式は、

$$x^2 + y^2 = 4(1 - t)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、円柱 B は、中心 $(1, 0, 0)$ で半径 1 の円を底面とし、

中心軸が z 軸に平行なので、その方程式は、 $z = t$ 上でも、

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②の交点は、①-②より、 $x = 2(1 - t)^2$

$t = 1 - \cos \theta$ とおくと $x = 2 \cos^2 \theta$ となり、①の半径

が $r = 2 \cos \theta$ から $\frac{x}{r} = \cos \theta$ である。

①より $y^2 = 4 \cos^2 \theta - 4 \cos^4 \theta = 4 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)$

$$= 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \sin^2 2\theta$$

よって、 $y = \pm \sin 2\theta$ となり、共通部分の面積は、

$$S(t) = 2 \left\{ \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^2 \theta + \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin 2\theta \right\}$$

$$= 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta = 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi$$

- (2) $t = 1 - \cos \theta$ より、 $\frac{dt}{d\theta} = \sin \theta$ となり、 $t = 0$ のとき $\theta = 0$ 、 $t = 1$ のとき $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi) \sin \theta d\theta$$

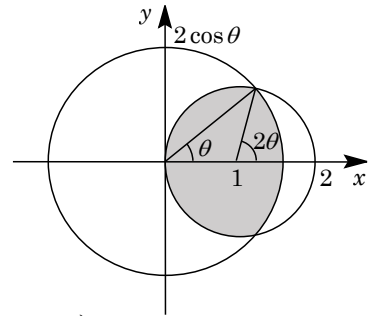
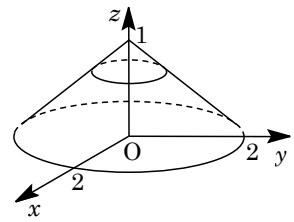
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \cos 2\theta \sin \theta - \sin 2\theta \sin \theta) d\theta + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$$

$$\text{ここで、} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \cos 2\theta \sin \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta (\sin 3\theta - \sin \theta) d\theta$$

$$= -\left[\theta \left(\frac{1}{3} \cos 3\theta - \cos \theta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos 3\theta - \cos \theta \right) d\theta = -\frac{10}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta - \cos \theta) d\theta = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって、} V = -\frac{10}{9} - \frac{2}{3} + \pi \cdot 1 = \pi - \frac{16}{9}$$



[解 説]

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て、似た問題があったという記憶があり、調べてみると、それは1994年度の3番でした。