２０２４ 入試対策

２次数学ランドマーク

ベクトル41題

文系＋理系 26か年

１９９８ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

ベクトル

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　△ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とおき，△$A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　△$A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2)　(1)のとき，△$A_2B_2C_2$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

［1998 一橋大］

2　空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$ をすべて求めよ。　［1999 東北大・理］

3　点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

［2000 大阪大・文］

4　円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。　［2000 京都大］

5　三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　実数 s, t が $0\leqq s+t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2)　(1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

［2000 神戸大・文］

6　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　［2001 東北大・文］

7　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0\,,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$$

を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

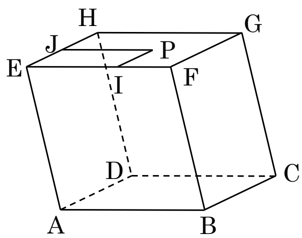
(1)　直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2)　四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。　［2002 千葉大・理］

8　空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を a，x，y を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

［2002 九州大・文］

9　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　OA ⊥ BC，OB ⊥ AC，OC ⊥ AB

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　［2003 京都大］

10 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S, xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。 ［2004 九州大・理］

11 空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

［2005 大阪大・理］

12 △ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。 ［2006 京都大・理］

13 大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。 ［2006 一橋大］

14 xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2007 大阪大]

15 a, b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。 [2007 九州大・理]

16 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008 大阪大]

17 平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。 [2009 大阪大・理]

18 座標平面上に点O(0, 0)と点P(4, 3)をとる。不等式$(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$の表す領域を$D$とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線$y=-\frac{4}{3}x+k$上の点を Q とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$k$を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の最大値および最小値を求めよ。 ［2010 広島大・文］

19 四面体ABCDにおいて，辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点Pは存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$はRのとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$であることを示せ。 ［2010 東北大］

20 三角形ABCの外心をO，重心をG，内心をIとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形ABCは直角三角形であることを証明せよ。

(2) kが$k\neq\frac{1}{3}$を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形ABCは二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。 ［2011 千葉大・理］

21 平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p, q$を求めよ。

(2) 平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq 1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。 ［2012 東北大・文］

22 xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1) P$(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

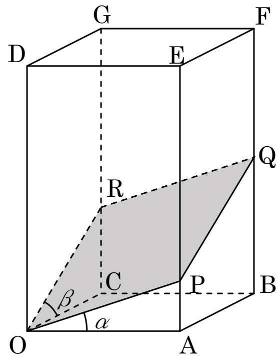
(2) 平面 $z=1$ 上に，4 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 1)$，D$(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2012 一橋大］

23 t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。 ［2013 一橋大］

24 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。



(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

［2014 東京大・理］

25 平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。 ［2015 北海道大・文］

$\boxed{26}$ xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点$(0,\ 0,\ \sqrt{3})$を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。 [2015 一橋大]

$\boxed{27}$ xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$の 2 点を通る直線 l と平面$z=0$との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。 [2015 京都大・文]

$\boxed{28}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$を満たすとする。

(1) $\beta=\angle\mathrm{ABC}$とおくとき，$\sin\beta$および$\cos 2\beta$の値を求めよ。

(2) (1)の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たす実数 s, t を求めよ。 [2016 北海道大・文]

$\boxed{29}$ 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を$2:1$に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。 [2017 東京大・文]

$\boxed{30}$ 座標空間において原点 O と点$\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$を通る直線を l とし，点$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$と点$\mathrm{C}(-2,\ 2,\ -3)$を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P, Q と，m 上の点 R を$\triangle$PQR が正三角形となるようにとる。このとき，$\triangle$PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。 [2017 京都大・文]

$\boxed{31}$ 正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$ を α を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた $x,\ y$ の和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。 [2018 千葉大・理]

32　四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。　［2018 京都大］

33　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。　［2019 神戸大］

34　空間内に $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B'，C' とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3)　P 上の三角形 $\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。　［2019 名古屋大・理］

35　座標空間内の 2 つの球面

$$S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。　［2019 大阪大］

36　k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X, Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。　［2020 京都大］

37　座標空間に 5 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 4)$，P$(0,\ 0,\ -2)$ をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q$(a,\ 0,\ 0)$ と R$(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1)　点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2)　点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点$(a,\ b)$ の範囲を座標平面に図示せよ。　［2020 東京工大］

38　平面上の△ABC で AB$=4$，BC$=5$，AC$=3$ となるものを考え，△ABC の外接円の中心を O とする。また，辺 AC を$1:5$に内分する点を P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{ABC}$ と $\cos\angle\mathrm{AOC}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $\cos\angle\mathrm{POC}$ の値をそれぞれ求めよ。

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ。

(4)　点 B と点 P を通る直線が△ABC の外接円と交わる点で B と異なる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。　［2021 金沢大・文］

39　座標空間内の 5 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(2,\ 1,\ 2)$，P$(4,\ 0,\ -1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$ を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2)　平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

(3)　点 R が平面 α 上を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。　［2022 九州大・理］

40 座標空間において，平面 $z=2$ 上の点 P と，平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2 \leqq 1,\ z=1$$

を考える。点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面)上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r>2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z=2$ 上の円 $C: x^2+y^2=r^2,\ z=2$ を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。 ［2023 金沢大・理］

41 座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

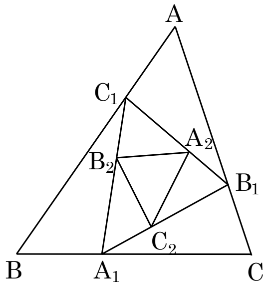
［2023 新潟大・医］

ベクトル

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 一橋大］



(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB_2}&=(1-t)\overrightarrow{AC_1}+t\overrightarrow{AA_1}\\&=(1-t)t\vec{b}+t\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}\\&=2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_2}&=(1-t)\overrightarrow{AA_1}+t\overrightarrow{AB_1}\\&=(1-t)\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}+t(1-t)\vec{c}\\&=(1-t)^2\vec{b}+2t(1-t)\vec{c}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AB_2}=(3t^2-4t+1)\vec{b}-(3t^2-2t)\vec{c}$$

(i) $B_2C_2 /\!/ AC$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=0$, よって $t=\dfrac{1}{3}$

(ii) $B_2C_2 /\!/ AB$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}$ の実数倍より $3t^2-2t=0$, よって $t=\dfrac{2}{3}$

(iii) $B_2C_2 /\!/ BC$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}-\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=3t^2-2t$,
よって $t=\dfrac{1}{2}$

(2) (1)と同様にして,

$$\overrightarrow{AA_2}=t\overrightarrow{AC_1}+(1-t)\overrightarrow{AB_1}=t^2\vec{b}+(1-t)^2\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_2A_2}=\overrightarrow{AA_2}-\overrightarrow{AC_2}=(2t-1)\vec{b}-(3t^2-4t+1)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AA_2}=(2t-3t^2)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$$

(i) $t=\dfrac{1}{3}$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C_2A_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ より, $\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle BCA$ で, 相似比は$1:3$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{C_2A_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$,
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より, $\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle CAB$ で, 相似比は$1:3$

(iii) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき, $\overrightarrow{B_2C_2}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C_2A_2}=-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$,
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ より, $\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$ で, 相似比は$1:4$

［解 説］

よくある構図の頻出問題です。上のように 1 次独立なベクトルを設定するか, または頂点の位置ベクトルを設定して解いていけば, 完答できる問題です。

2 ［1999 東北大・理］

条件より，$S_1 : (x-10)^2 + y^2 + z^2 = 81$ ………①

$S_2 : x^2 + (y-10)^2 + z^2 = 64$ ………②

S_1 と S_2 に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z) = t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2 + (bt)^2 + (ct)^2 = 81$

$$(a^2 + b^2 + c^2)t^2 - 20at + 19 = 0$$

④から，$t^2 - 20at + 19 = 0$

①と③が接するので，$D/4 = 100a^2 - 19 = 0$，$a = \pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2 + (bt-10)^2 + (ct)^2 = 64$

$$(a^2 + b^2 + c^2)t^2 - 20bt + 36 = 0$$

④から，$t^2 - 20bt + 36 = 0$

②と③が接するので，$D/4 = 100b^2 - 36 = 0$，$b = \pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100} + \dfrac{9}{25} + c^2 = 1$

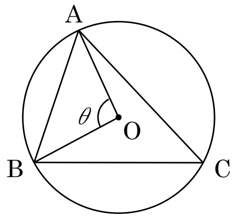
$c \geqq 0$ なので，$c = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

［解 説］

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2000 大阪大・文］



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=R$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$R^2+2R^2\cos\theta+R^2=R^2$$

$$2\cos\theta+1=0,\ \ \cos\theta=-\frac{1}{2},\ \ \theta=120^\circ$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，$2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と変形をすると，辺 AB の中点と頂点 C は O に関して反対側にあることになり，

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，同様にして，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$

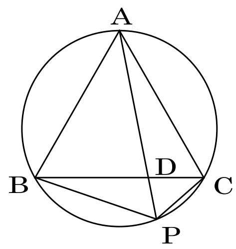
よって，$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解 説］

ずいぶん前になりますが, 1992 年に京大で，類題が出ています。

$\boxed{4}$ [2000 京都大]



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$BD : DC = p : (1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{AD} = (1-p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = (1-p)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1-p)p\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + p^2|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= (1-p)^2 + (1-p)p + p^2 = 1 - p + p^2$$

よって，$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$AD\cdot DP = BD\cdot DC$

$$DP = \frac{BD\cdot DC}{AD} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$AD : AP = \sqrt{1-p+p^2} : \left(\sqrt{1-p+p^2} + \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$= (1-p+p^2) : (1-p+p^2+p-p^2)$$

$$= (1-p+p^2) : 1$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{AD} = \frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{AC}$$

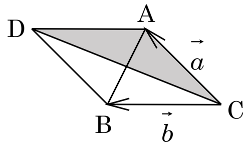
［解 説］

方べきの定理が活躍する構図の設問です。

$\boxed{5}$ ［2000 神戸大・文］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$ ……(a)に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{a} + \vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad (0 \leqq s + t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$



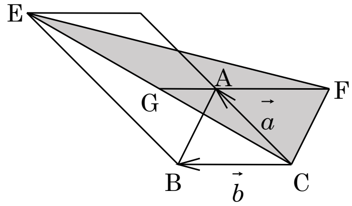
よって，点 P は△ADC の内部または周上に存在する。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (2s + t)\vec{a} + (s - t)\vec{b}$ ……(b)に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s(2\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} - \vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = 2\vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \vec{a} - \vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CE}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}} \quad (0 \leqq s + t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$



よって，点 P は△CEF の内部または周上に存在する。

(2) (a)の場合は，△ADC = △ABC より，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 1 倍となる。

(b)の場合は，$\mathrm{GF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{AF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{BC}$，$\mathrm{EB} = 2\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{EFC} = \left(\frac{3}{2} \times 2\right)\triangle\mathrm{ACF} = 3\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 3 倍となる。

［解 説］

一般的に難しめの問題が多いベクトルと領域の融合題ですが，本問は基本の確認が主となっています。