２０２４ 入試対策

２次数学ランドマーク

図形と計量22題

文系＋理系 26か年

１９９８ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

図形と計量

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて, l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0° < \theta \leqq 90°$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。 ［1999 九州大］

2 四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ} = 30°$ である。

(1) $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。 ［2001 一橋大］

3 原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 ［2001 岡山大・理］

4 頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1) 円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2) 円錐の体積の最小値を求めよ。 ［2002 一橋大］

5 四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。 ［2006 東京大・文］

6 1辺の長さが1の正方形ABCDの辺BC, CD, DA, AB上に，それぞれ点P, Q, R, Sを，$\angle APB = \angle QPC$，$\angle PQC = \angle RQD$，$\angle QRD = \angle SRA$となるようにとる。ただし，点P, Q, R, Sは，どれも正方形ABCDの頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分BPの長さtのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 直線APと直線RSの交点をTとする。四角形PQRTの面積を線分BPの長さtについての関数と考えて$f(t)$で表す。$f(t)$の最大値を求めよ。 ［2006 大阪大・理］

7 方程式$x^2+y^2-4y+2=0$で定義される円Cを考える。

(1) 点$A(-\sqrt{2},\ 0)$と$O(0,\ 0)$を通り中心の座標が$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$および$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$である2つの円は，どちらも円$C$に接することを示せ。

(2) 点Pが円C上を動くとき，$\cos\angle APO$の最大値と最小値を求めよ。

［2007 北海道大・文］

8 地球上の北緯60°東経135°の地点をA，北緯60°東経75°の地点をBとする。AからBに向かう2種類の飛行経路R_1，R_2を考える。R_1は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度0を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。 ［2008 京都大・理］

9 平面上で，鋭角三角形△OABを辺OBに関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBCを辺OCに関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCDを辺ODに関して折り返して得られる三角形を△ODEとする。△OABと△OBEの面積比が$2:3$のとき，$\sin\angle AOB$の値を求めよ。 ［2009 京都大・文］

$\boxed{10}$ xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2)で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。

［2011 神戸大・文］

$\boxed{11}$ 平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。［2013 一橋大］

$\boxed{12}$ 鋭角三角形 △ABC について，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD, OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。［2014 九州大・文］

$\boxed{13}$ 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b) 半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。［2015 京都大］

$\boxed{14}$ $t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。［2015 東北大］

15 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 ［2016 京都大・理］

16 α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii) $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。 ［2018 京都大・理］

17 三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle\mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{B} = 2\beta$，$\angle\mathrm{C} = 2\gamma$ とおく。

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。 ［2018 東北大・理］

18 三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC} = 2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD} = 15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A = \angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。 ［2019 千葉大・理］

19 (1) $h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの s, t の値を求めよ。

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l, m, n とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。 ［2019 東京工大］

20 平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を△PQR で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，△PQR＝0 とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，△ABC＝1 とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。 ［2020 東京大・理］

21 $0<x<y$ とする。平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_{A}，l_{B}，l_{C}，l_{D} とし，l_{A} と l_{B} の交点を E，l_{B} と l_{C} の交点を F，l_{C} と l_{D} の交点を G，l_{D} と l_{A} の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{FEH}$ を求めよ。

(2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。

(3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x, y の条件を求めよ。

(4) S を求めよ。 ［2023 岡山大・理］

22 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A，B，C，D が，AB＝1，AC＝BC，AD＝BD，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$ を満たしているとする。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

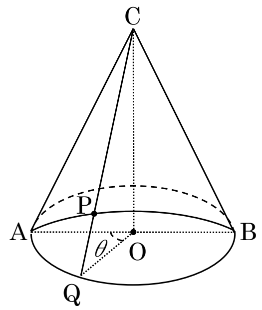
(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。 ［2023 東京大・文］

図形と計量

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1　　［1999 九州大］



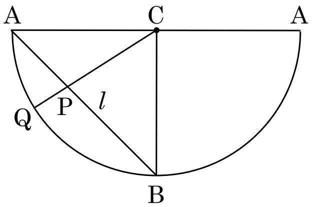
(1)　母線 AC の長さは $\sqrt{1+3}=2$ となるので，側面の展開図の中心角を φ とすると，

$$2\pi\cdot 1=2\pi\cdot 2\cdot\frac{\varphi}{360^\circ}\ \text{より，}\ \varphi=180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

よって，l の長さは展開図で $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ となる。

(2)　弧 AQ の長さは，底面では $2\pi\cdot 1\cdot\dfrac{\theta}{360^\circ}$ であるが，側面の展開図では $2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{\angle\mathrm{ACQ}}{360^\circ}$ と表せるので，$\angle\mathrm{ACQ}=\dfrac{\theta}{2}$

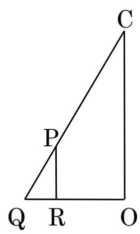


$\triangle\mathrm{APC}$ に正弦定理を適用すると，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$ から，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

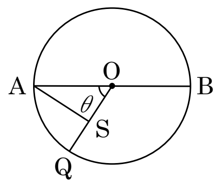
$$\mathrm{CP}=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

よって，$\mathrm{CP}^2=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3)　$\triangle\mathrm{COQ}$ について考えると，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}$ から，

$\mathrm{OR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{1+\sin\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}$ より，$\mathrm{OR}^2=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$



次に底面について，$\mathrm{OS}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$ より $\mathrm{OS}^2=\cos^2\theta$

よって，$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと $0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

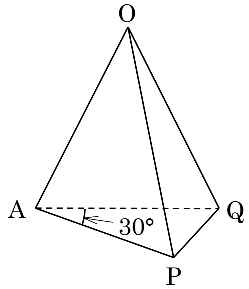
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値は $\dfrac{32}{27}$ である。

［解 説］

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

２ ［2001 一橋大］



(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=p$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=q$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{p^2+1}，\ \mathrm{AQ}=\sqrt{q^2+1}，\ \mathrm{PQ}=\sqrt{p^2+q^2}$$

ここで，$\triangle\mathrm{APQ}$ に余弦定理を適用して，

$$p^2+q^2=(p^2+1)+(q^2+1)-2\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cos 30^\circ$$

$$\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$S=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) ①より，$(p^2+1)(q^2+1)=\frac{4}{3}$，$q^2=\frac{4}{3(p^2+1)}-1=\frac{1-3p^2}{3(p^2+1)}\cdots\cdots\cdots②$

$q>0$ より $q^2>0$ なので，$1-3p^2>0$

$p>0$ と合わせて，$0<p<\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots③$

(3) $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot p\right)\cdot q=\frac{1}{6}pq$ となるので，

②より，$p^2q^2=\frac{p^2-3p^4}{3(p^2+1)}=-p^2+\frac{4}{3}+\frac{-4}{3p^2+3}=-\left(p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\right)+\frac{7}{3}$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\geqq 2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3p^2+3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは，$p^2+1=\frac{4}{3p^2+3}$，$(p^2+1)^2=\frac{4}{3}$，すなわち $p^2=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ のときであるが，この値は③を満たす。

すると，$p^2q^2\leqq-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ となり，

$$pq\leqq\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，V の最大値は $\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{18}$ である。

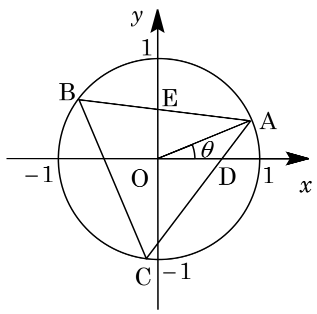
［解 説］

最大・最小問題に分数式が絡んでくると，相加平均・相乗平均の出番です。というのも，微分は範囲外ですので。

$\boxed{3}$ ［2001 岡山大・理］

正三角形 ABC に対して $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，対称性から $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき



$\triangle$OAD において，$\angle \mathrm{ADO} = \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{6}\pi - \theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)}$$

$$\mathrm{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

$\triangle$OAE において，$\angle \mathrm{OEA} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{3}\pi + \theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)},\quad \mathrm{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

$\triangle$ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\sin\theta + \frac{1}{2}\mathrm{OE}\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

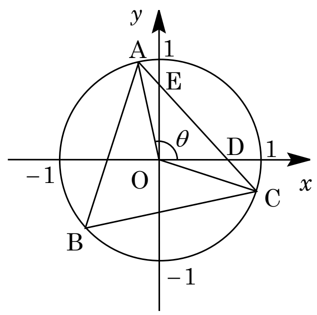
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}{\sqrt{3}\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta + 1}{2\sin 2\theta + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4(2\sin 2\theta + \sqrt{3})}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$0 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ となる。

よって，$\sin 2\theta = 1$ のとき最大値 $S = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin 2\theta = 0$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき



$\triangle$OCD において，$\angle \mathrm{ODC} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right) = \dfrac{\pi}{6} + \theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}$$

$$\mathrm{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

$\triangle$OAE において，$\angle\mathrm{OEA} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)},\quad \mathrm{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$\triangle$ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta}$$
$$= -\frac{1}{4\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\dfrac{4}{3}\pi \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ なので，$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{4}$ をとる。

(i)(ii)より, S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが，意外に奥が深いという感じがします。