1　　　　[名古屋大・文]

a を実数とし，2 つの関数 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+(a-2)x+2a+1$ と $g(x)=-x^2+1$ を考える。

(1)　$f(x)-g(x)$ を因数分解せよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ。

(3)　a は(2)の条件を満たし，さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。

1　　　　　［名古屋大・文］

(1)　$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(a-2)x+2a+1$，$g(x)=-x^2+1$ に対して，

$$f(x)-g(x)=x^3-(a+1)x^2+(a-2)x+2a=(x+1)\{x^2-(a+2)x+2a\}$$
$$=(x+1)(x-2)(x-a)$$

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，$f(x)-g(x)=0$ より，

$$x=-1,\ 2,\ a$$

すると，共有点が 2 個の条件は，$a=-1$ または $a=2$ である。

(3)　(i)　$a=-1$ のとき

$$f(x)=x^3-x^2-3x-1,\ f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-2)$$

ここで，$f'(x)=3x^2-2x-3$ から，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{10}}{3},\ \beta=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(\alpha)$ となる。

さて，$-1<x<2$ において，$f(x)-g(x)<0$ すなわち $f(x)<g(x)$ である。

すると，$-1<\alpha<2$ なので $f(\alpha)<g(\alpha)\leqq g(0)=1$ となり，条件に反する。

(ii)　$a=2$ のとき

$$f(x)=x^3-4x^2+5,\ f(x)-g(x)=(x+1)(x-2)^2$$

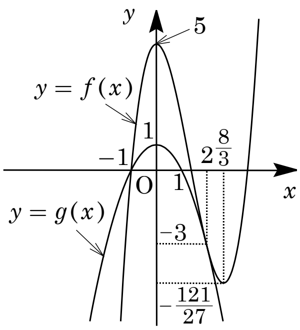
ここで，$f'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$ から，$f'(x)=0$ の解は $x=0,\ \dfrac{8}{3}$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(0)=5$ で，条件を満たす。

(i)(ii)より，$a=2$，$f(x)=x^3-4x^2+5$ である。

以上より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは，$x=-1$ で交わり，$x=2$ で接することに注意すると，右図のようになる。



［解 説］

微分と増減に関する標準的な問題です。(3)の(i)の場合の極大値は次数下げの方法で求まりますが，ここは「1 よりも大きい」という表現に着目をし，グラフをもとに考えました。

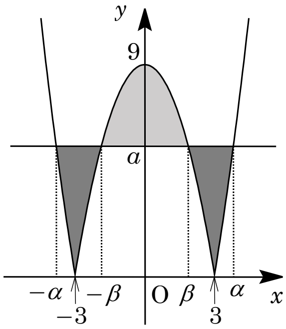
$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

a を $0<a<9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 l を，次のように定める。

$$C: y=\left|(x-3)(x+3)\right|,\quad l: y=a$$

曲線 C と直線 l で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ となる a の値を求めよ。

2　　　　［九州大・文］



曲線 $C: y=\left|(x-3)(x+3)\right|=\left|x^2-9\right|$ に対して，

$y=x^2-9\ (x\leqq -3,\ 3\leqq x)$ ………①

$y=-x^2+9\ (-3<x<3)$ ………②

C と直線 $l: y=a\ (0<a<9)$ ……③との交点を求めると，

①③から $x^2-9=a$ となり，$x=\pm\sqrt{a+9}$

②③から $-x^2+9=a$ となり，$x=\pm\sqrt{9-a}$

そして，$\alpha=\sqrt{a+9}$，$\beta=\sqrt{9-a}$ とおく。

さて，C と l で囲まれる図形のうち，$y\geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y\leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。また，曲線②の l と x 軸にはさまれた部分の面積を S_3 とおくと，$S_1=S_2$ から $S_1+S_3=S_2+S_3$ が成り立ち，

$$S_1+S_3=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx=-\int_{-3}^{3}(x-3)(x+3)dx=\frac{1}{6}(3+3)^3=36$$

また，$\alpha^2=a+9$ から $a=\alpha^2-9$ となり，

$$S_2+S_3=2\alpha\cdot a-2\int_{3}^{\alpha}(x^2-9)dx=2\alpha(\alpha^2-9)-2\Big[\frac{x^3}{3}-9x\Big]_3^{\alpha}$$

$$=2\alpha^3-18\alpha-\frac{2}{3}(\alpha^3-27)+18(\alpha-3)=\frac{4}{3}\alpha^3-36$$

これより，$36=\frac{4}{3}\alpha^3-36$ となり，$\alpha^3=54$ から $\alpha=3\sqrt[3]{2}$ である。

よって，求める a の値は $a=9\sqrt[3]{4}-9$ である。

［解　説］

定積分と面積についての問題です。上の解答例では S_3 を設定しましたが，このような計算の工夫がポイントです。

3　　［東北大・文］

関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=-2|x-1|+2$ に対して，S の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3)　設問(2)の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，S の値を求めよ。

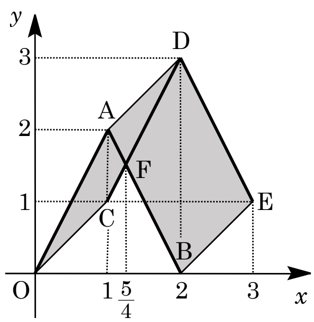
$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・文］

(1)　$f(x)=-2|x-1|+2$ に対して,

$x\geqq 1$ のとき，$f(x)=-2(x-1)+2=-2x+4$

$x<1$ のとき，$f(x)=2(x-1)+2=2x$

さて，実数 x が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ は点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を結ぶ折れ線上，点 $\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ 1)$ から，点 $\mathrm{C}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{D}(2,\ 3)$，点 $\mathrm{E}(3,\ 1)$ を結ぶ折れ線上を動くので, 線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部となる。



また, 線分 AB と CD の交点を F とおくと, F の x 座標は,

$$-2x+4=2(x-1)+1,\ 4x=5,\ x=\frac{5}{4}$$

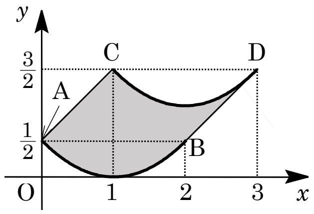
そこで, 網点部の面積を S とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3-1)=\frac{5}{8}+3=\frac{29}{8}$$

(2)　$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ に対し $f'(x)=x-1$ より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 1 となるのは，$f'(t)=t-1=1$ から $t=2$ である。

すると, 接線の方程式は，$y-\frac{1}{2}(2-1)^2=x-2$ から $y=x-\frac{3}{2}$ となる。

(3)　まず，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ は放物線 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 上，点 $\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ は放物線 $y-1=\frac{1}{2}(x-1-1)^2$ すなわち $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 上を動くので，$0\leqq x\leqq 2$ のとき，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部となる。



ここで，4 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$ とおくと，網点部の面積 S は, 平行四辺形 ABDC の面積に等しいので,

$$S=2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=2$$

［解　説］

線分の通過領域の問題です。なお, この領域の面積について，本問のように平行移動の場合は, 平行四辺形に着目するのがポイントです。もちろん定積分で計算してもよいですが……。

$\boxed{4}$ ［金沢大・文］

実数 a, b が，次の条件を満たすとする。

$(x,\ y)$ を座標とする座標平面において，不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ があり，不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{C}(-3,\ -1)$ と点 $\mathrm{D}(3,\ -1)$ がある。

次の問いに答えよ。

(1)　$b=0$ のとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　与えられた条件を満たす $(a,\ b)$ 全体の集合を，$(a,\ b)$ を座標とする座標平面に図示せよ。

(3)　$(x,\ y)$ を座標とする座標平面上で，点 $\mathrm{P}(5,\ -2)$，点 $\mathrm{Q}(5,\ 3)$ を考える。このとき，直線 $y=ax+b$ は線分 PQ と必ず共有点をもつことを示せ。

4　　［金沢大・文］

(1) 不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ があるので，

$1 \geqq -a+b$ ………①，$1 \geqq a+b$ ………②

不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{C}(-3,\ -1)$ と点 $\mathrm{D}(3,\ -1)$ があるので，

$-1 \leqq -3a+b$ ………③，$-1 \leqq 3a+b$ ………④

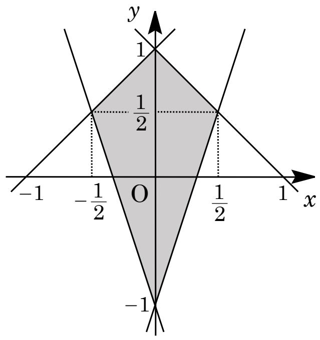
さて，$b=0$ のとき，①～④から $1 \geqq -a$ かつ $1 \geqq a$ かつ $-1 \leqq -3a$ かつ $-1 \leqq 3a$ となり，変形すると，$a \geqq -1$ かつ $a \leqq 1$ かつ $a \leqq \dfrac{1}{3}$ かつ $a \geqq -\dfrac{1}{3}$ から，

$-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$

(2) ①～④より，$b \leqq a+1$ かつ $b \leqq -a+1$ かつ $b \geqq 3a-1$ かつ $b \geqq -3a-1$

ここで，境界線 $b=a+1$ と $b=-3a-1$ の交点は $(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，また $b=-a+1$ と $b=3a-1$ の交点は $(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

これより，①～④を満たす $(a,\ b)$ 全体の集合は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(3) 2 点 $\mathrm{P}(5,\ -2)$，$\mathrm{Q}(5,\ 3)$ に対して，線分 PQ は，

$x=5\ \ (-2 \leqq y \leqq 3)$

ここで，$y=ax+b$ と $x=5$ を連立すると $y=5a+b$ となり，$(a,\ b)$ が①～④を満たすとき $5a+b$ のとりうる値の範囲は，ab 平面上で直線 $b=-5a+y$ ……⑤と(2)の網点部が共有点をもつ y の範囲として得られる。

直線⑤は傾きが -5 の直線群を表し，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $y=3$，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $y=-2$ であることから，図より y の範囲は $-2 \leqq y \leqq 3$ となる。したがって，直線 $y=ax+b$ は線分 PQ と必ず共有点をもつ。

［解 説］

領域と最大・最小の問題です。(3)は線分 PQ が y 軸に平行なことから，共有点の y 座標の範囲で示しました。なお，正領域と負領域の考え方を用いる方法もあります。

5 ［大阪公大・文］

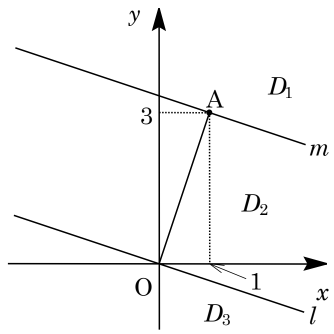
座標平面上で，原点 O と点 A$(1,\ 3)$ を結ぶ線分 OA を考える。与えられた点 P に対し，P と線分 OA の距離を $d(\mathrm{P})$ とおく。すなわち $d(\mathrm{P})$ は，点 Q が線分 OA 上を動くときの線分 PQ の長さの最小値である。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標が $(5,\ 2)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ の値を求めよ。

(2) 点 P の座標が $(a,\ b)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ を $a,\ b$ の式で表せ。

(3) 放物線 $y=x^2$ 上にあり，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標をすべて求めよ。

5　　　　［大阪公大・文］



(1) 原点Oと点A(1, 3)に対して，線分OAの方程式は，

$y=3x\ (0\leqq x\leqq 1)$

直線OAに垂直な点O，点Aを通る直線を，それぞれl，mとおくと，lの方程式は$y=-\dfrac{1}{3}x$，mの方程式は$y-3=-\dfrac{1}{3}(x-1)$より$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$となる。

ここで，領域D_1，D_2，D_3を以下のように定める。

$D_1: y\geqq -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}\ (x+3y\geqq 10)$

$D_2: -\dfrac{1}{3}x<y<-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}\ (0<x+3y<10)$，$D_3: y\leqq -\dfrac{1}{3}x\ (x+3y\leqq 0)$

ここで，線分OA上の点Qに対し，線分PQの最小値を$d(\mathrm{P})$とすると，点P(5, 2)は，$5+3\cdot 2=11>10$から領域D_1にあることより，

$d(\mathrm{P})=\mathrm{AP}=\sqrt{(5-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{17}$

(2) 点P$(a,\ b)$に対して，$d(\mathrm{P})$をa, bの式で表すと，

(i) 点Pが領域D_1にある$(a+3b\geqq 10)$のとき

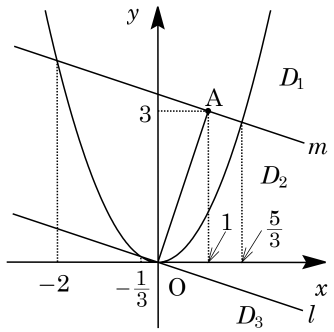
$d(\mathrm{P})=\mathrm{AP}=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$

(ii) 点Pが領域D_2にある$(0<a+3b<10)$のとき　直線OA : $3x-y=0$より，

$d(\mathrm{P})=\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}|3a-b|$

(iii) 点Pが領域D_3にある$(a+3b\leqq 0)$のとき

$d(\mathrm{P})=\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$



(3) 放物線$y=x^2$……(∗)上に点P$(a,\ a^2)$をとる。

まず，(∗)とlの交点は$x^2=-\dfrac{1}{3}x$より$x=0,\ -\dfrac{1}{3}$

また，(∗)とmの交点は$x^2=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$より，

$3x^2+x-10=0$，$(3x-5)(x+2)=0$

これより，$x=\dfrac{5}{3},\ -2$となる。

ここで，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$となるのは，(2)から，

(i) 点Pが領域D_1にある$\left(a\leqq -2,\ \dfrac{5}{3}\leqq a\right)$のとき

$\sqrt{(a-1)^2+(a^2-3)^2}=\sqrt{10}$，$a^4-5a^2-2a+10=10$

これより，$a(a+2)(a^2-2a-1)=0$となり，$a=0,\ -2,\ 1\pm\sqrt{2}$である。

すると，$a\leqq -2,\ \dfrac{5}{3}\leqq a$から，$a=-2,\ 1+\sqrt{2}$

(ii) 点 P が領域 D_2 にある$\left(-2<a<-\dfrac{1}{3},\ 0<a<\dfrac{5}{3}\right)$のとき

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\,3a-a^2\,\right|=\sqrt{10}\,,\ \ 3a-a^2=\pm10\,,\ \ a^2-3a\pm10=0$$

$a^2-3a+10=0$ は実数解をもたず，$a^2-3a-10=0$ は $(a+2)(a-5)=0$ から $a=-2,\ 5$ となるが $-2<a<-\dfrac{1}{3},\ 0<a<\dfrac{5}{3}$ を満たさない。

(iii) 点 P が領域 D_3 にある$\left(-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0\right)$のとき

$$\sqrt{a^2+a^4}=\sqrt{10}\,,\ \ a^2+a^4=10\,,\ \ a^2(a^2+1)=10$$

$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ から $0\leqq a^2(a^2+1)\leqq\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{10}{81}$ となり，満たす a は存在しない。

(i)～(iii)より，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標は，-2 または $1+\sqrt{2}$ である。

［解 説］

点と線分の距離についての基本題ですが，量的には多めです。解答例では，直線 l と m によって分けられる領域を設定して，図形的な解き方をしました。

$\boxed{6}$ ［岡山大・理］

$0 < x < y$ とする。平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，$\angle\mathrm{ABC} = 2\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_{A}，l_{B}，l_{C}，l_{D} とし，l_{A} と l_{B} の交点を E，l_{B} と l_{C} の交点を F，l_{C} と l_{D} の交点を G，l_{D} と l_{A} の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{FEH}$ を求めよ。

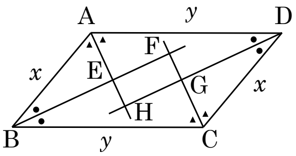
(2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。

(3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x, y の条件を求めよ。

(4) S を求めよ。

６ ［岡山大・理］

(1) $\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{BC}=y$ $(0<x<y)$ である平行四辺形 ABCD において，内角の二等分線の交点を右図のように E, F, G, H とする。そして，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta$，$\angle\mathrm{BAD}=2\varphi$ とおくと，



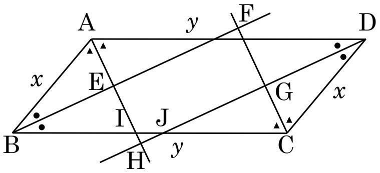
$$2\theta+2\varphi=\pi\,,\ \ \theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

すると，$\angle\mathrm{FEH}=\angle\mathrm{AEB}=\pi-(\theta+\varphi)=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2) (1)から，平行四辺形 EFGH は長方形となり，$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{AHD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\mathrm{AE}=x\sin\theta\,,\ \ \mathrm{AH}=y\sin\theta$$

(3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるとき，辺 BC と線分 AH の交点を I とおくと，$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}$ である。このとき $\triangle\mathrm{AEB}\equiv\triangle\mathrm{IEB}$ から $\mathrm{AE}=\mathrm{IE}$ となり，



$$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}=2\mathrm{AE}\,,\ \ y\sin\theta>2x\sin\theta$$

よって，求める条件は，$y>2x$ である。

(4) 平行四辺形 ABCD と長方形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。

(i) $y\leqq 2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の内部または辺上にある。

$$\mathrm{EH}=\mathrm{AH}-\mathrm{AE}=y\sin\theta-x\sin\theta=(y-x)\sin\theta$$

$$\mathrm{GH}=\mathrm{DH}-\mathrm{DG}=y\cos\theta-x\cos\theta=(y-x)\cos\theta$$

これより，長方形 EFGH の面積は，$\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EH}=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$$

(ii) $y>2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の外部にある。

辺 BC と線分 DH の交点を J とおくと，

$$\mathrm{IH}=\mathrm{AH}-2\mathrm{AE}=y\sin\theta-2x\sin\theta=(y-2x)\sin\theta$$

$$\mathrm{JH}=\mathrm{DH}-2\mathrm{DG}=y\cos\theta-2x\cos\theta=(y-2x)\cos\theta$$

これより，$\triangle\mathrm{IJH}$ の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{IH}\cdot\mathrm{JH}=\dfrac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta-2\cdot\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta=x(2y-3x)\sin\theta\cos\theta$$

［解 説］

平行四辺形を題材にした計量問題です。点 H の位置で場合分けをすることが重要ですが，この点は問題文の S の定義や(3)の設問から読み取れます。

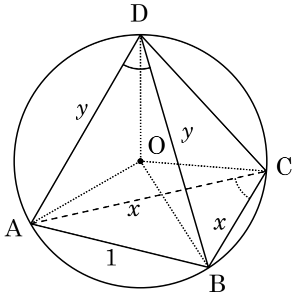
$\boxed{7}$ ［東京大・文］

半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$を満たしているとする。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

7 ［東京大・文］



(1) 中心が点 O で半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D に対して，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=x$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=y$，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$ のとき，まず△ABC に余弦定理を適用すると，

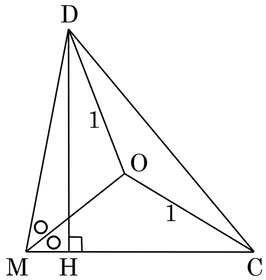
$$x^2+x^2-2x^2\cos\angle\mathrm{ACB}=1^2,\ 2x^2-\frac{8}{5}x^2=1$$

すると，$\dfrac{2}{5}x^2=1$ より $x^2=\dfrac{5}{2}$ となり，$x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

そこで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}x^2\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{4}$$

(2) △ABD に余弦定理を適用すると，(1)と同様にして，$y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ となる。



ここで，線分 AB の中点を M，点 D から平面 ABC に下ろした垂線と平面 ABC の交点を H とおくと，四面体 ABCD が平面 DMC に関して対称であることから，中心 O と点 H は平面 DMC 上にある。

さて，△OAB は正三角形なので，$\mathrm{OM}=1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また，$x=y=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ より，$\mathrm{CM}=\mathrm{DM}=\sqrt{\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ となり，これより $\angle\mathrm{OMC}=\angle\mathrm{OMD}$ である。

そこで，$\theta=\angle\mathrm{OMC}$ とおき，△OMC に余弦定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos\theta=1^2,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta=2$$

すると，$\cos\theta=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ から，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{16}{27}}=\dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$ となるので，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DM}\sin2\theta=\frac{3}{2}\cdot2\sin\theta\cos\theta=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{11}$$

よって，四面体 ABCD の体積を V とおくと，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}\sqrt{11}=\frac{\sqrt{11}}{9}$$

［解 説］

四面体を題材とした計量問題です。(2)のポイントは対称性に着目することです。

$\boxed{8}$ ［大阪大］

平面上の 3 点 O, A, B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1 \quad かつ \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1)　$(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2)　平面上の点 P が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$ をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

8 ［大阪大］

(1) 平面上の 3 点 O, A, B に対して，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

すると，$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=1$ より，$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1$ ………①

また，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OC}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}$ となり，

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=1,\ |\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ となり，$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0$

(2) $|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})|\leqq\frac{1}{3}$ より，$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right|\leqq\frac{1}{3}$ ………③

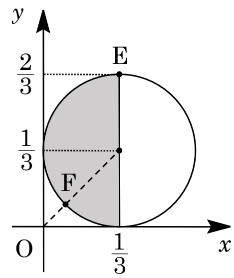
また，$\overrightarrow{OP}\cdot(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\leqq\frac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\frac{1}{3}$ ………④

ここで，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ として，(1)から $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OD}$ は直交する単位ベクトルなので，一般性を失うことなく，$\overrightarrow{OC}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{OD}=(0,\ 1)$ とおける。

すると，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ なので，③から $\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}\leqq\frac{1}{3}$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

また，④から $x\leqq\frac{1}{3}$ なので，点 P の存在領域は右図の網点部(境界は含む)となる。このとき，点 E，点 F を右図のように決めると，$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値は $OE=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は $OF=\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ である。



［解 説］

平面ベクトルの標準的な問題です。(1)の置換えがポイントですが，これは問題文が発する濃厚な匂いによって，気がつくのではないでしょうか。

$\boxed{9}$ ［筑波大・理］

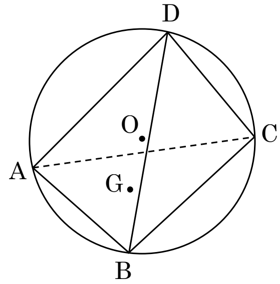
座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|$ を r を用いて表せ。

9 ［筑波大・理］



(1) 中心 O, 半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD に対して，△ABC の重心を G とおくと，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

条件より，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$……①なので，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{OD})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}\cdots\cdots\cdots②$$

(2) ①より，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}$ となり，

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=r$ なので，③の両辺を 2 乗すると，

$$r^2+r^2+r^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})=r^2$$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-r^2\cdots\cdots\cdots④$

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，$F=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ とおく。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+r^2\end{aligned}$$

同様にして，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+r^2$

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}+r^2$$

すると，①④から，

$$\begin{aligned}F&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+3r^2\\&=-r^2+2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}+3r^2=2r^2+2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

$-r^2\leqq\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}\leqq r^2$ より，F の最大値は $2r^2+2r^2=4r^2$ である。

このとき，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}=r^2$ すなわち P＝D となり，②から，

$$|\overrightarrow{PG}|=|\overrightarrow{DG}|=|\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}|=\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}\right|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{OD}|=\frac{4}{3}r$$

［解 説］

空間ベクトルの標準的な問題です。誘導に乗れば，完答も難しくはないでしょう。

10 ［金沢大・理］

座標空間において，平面 $z=2$ 上の点 P と，平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2 \leqq 1,\ \ z=1$$

を考える。点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面)上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

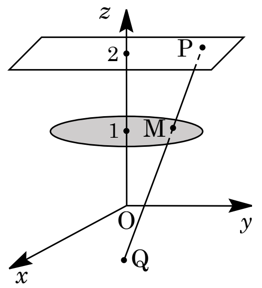
(1) P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r>2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z=2$ 上の円 $C: x^2+y^2=r^2,\ z=2$ を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ ［金沢大・理］

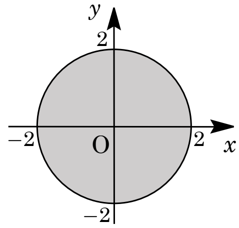
(1) 平面$z=2$上の点 P, 平面$z=0$上の点 Q, 平面$z=1$上の円板$B: x^2+y^2 \leqq 1$, $z=1$に対して, 線分 PQ と B が共有点をもつ$\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$全体からなる図形をDとする。



さて, $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$のとき, 線分 PQ の中点$\mathrm{M}\left(\dfrac{x}{2},\ \dfrac{y}{2},\ 1\right)$が円板$B$上にあることから,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leqq 1,\ x^2+y^2 \leqq 4$$

よって, Dは中心が原点で半径 2 の円の内部または周上である。図示すると, 右図の網点部となる。

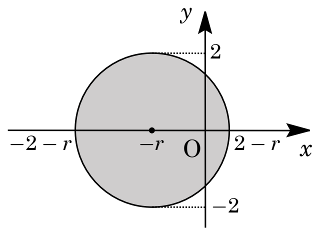


ただし, 境界は領域に含む。

(2) r が正の定数のとき, $\mathrm{P}(r,\ 0,\ 2)$に対して, 線分 PQ の中点$\mathrm{M}\left(\dfrac{x+r}{2},\ \dfrac{y}{2},\ 1\right)$が円板$B$上にあることから,

$$\left(\frac{x+r}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leqq 1,\ (x+r)^2+y^2 \leqq 4$$

よって, D は中心$(-r,\ 0)$で半径 2 の円の内部または周上である。図示すると, 右図の網点部となる。



ただし, 境界は領域に含む。

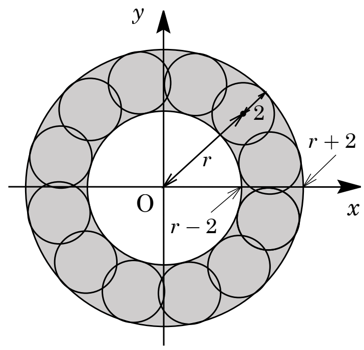
(3) $r>2$を満たす定数 r に対して, 点 P が円$C: x^2+y^2=r^2$, $z=2$上を動くとき, θを任意の実数として$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 2)$とおくことができる。

線分 PQ の中点$\mathrm{M}\left(\dfrac{x+r\cos\theta}{2},\ \dfrac{y+r\sin\theta}{2},\ 1\right)$が円板$B$上にあることから,

$$\left(\frac{x+r\cos\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{y+r\sin\theta}{2}\right)^2 \leqq 1$$

$$(x+r\cos\theta)^2+(y+r\sin\theta)^2 \leqq 4$$

これより, D は中心$(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$で半径 2 の円板であり, θが任意の実数で変化することにより, その通過する部分は右図の網点部となる。



この面積をSとすると,

$$S=\pi(r+2)^2-\pi(r-2)^2=8\pi r$$

［解 説］

空間図形の軌跡についての問題です。(3)は, $r>2$という条件から, Dの通過領域がドーナツ形となります。

11 ［新潟大・医］

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

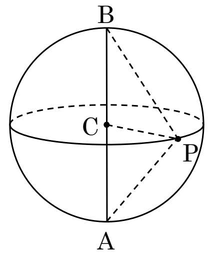
(3) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ $y\geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

11　　［新潟大・医］

(1)　2 点 A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面 S は，中心 C の座標が $\left(\dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{-1-1}{2},\ \dfrac{1+5}{2}\right)=(1,\ -1,\ 3)$ であり，半径が $\mathrm{AC}=3-1=2$ より，

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

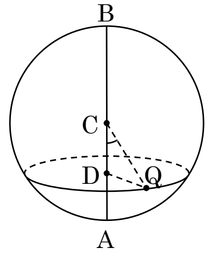
(2)　点 P が S 上を動くとき，△ABP の面積が最大になるのは，P と z 軸に平行な直線 AB との距離が最大になるときである。



すなわち，P が中心 C を通り AB に垂直な平面と S との交線上にあるときになる。このときの△ABP の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$$

(3)　点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，Q は点 C を頂点とし，中心軸と母線のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である円錐側面上にあり，



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|\cos\frac{\pi}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(0,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(x-1,\ y+1,\ z-3)$ から，

$$-2(z-3)=2\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$-2(z-3)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより，球面 S と円錐側面の交線は①かつ②で表せ，①を②に代入すると，

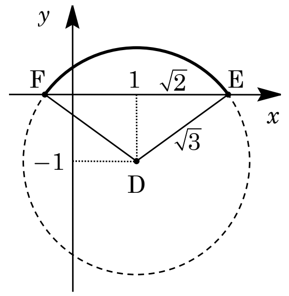
$$-2(z-3)=2,\ z=2\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，③を①に代入すると，$(x-1)^2+(y+1)^2+(2-3)^2=4$ から，

$$(x-1)^2+(y+1)^2=3\ \cdots\cdots\cdots④$$

したがって，球面 S と円錐側面の交線は，③かつ④で表せることになる。

これより，点 Q は平面 $z=2$ 上で，中心 D$(1,\ -1,\ 2)$，半径 $\sqrt{3}$ の円を描く。

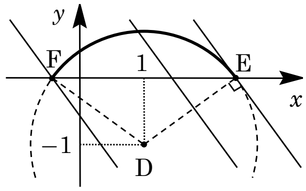


さらに，$y\geqq0$ という条件を加えると，点 Q$(x,\ y,\ 2)$ は平面 $z=2$ 上で右図の弧 EF (太線部)を動くことになる。なお，E$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，F$(1-\sqrt{2},\ 0,\ 2)$ である。

さて，点 R$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(x-1,\ y+1,\ -1)$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}=\sqrt{2}(x-1)+(y+1)-1=\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}$$

ここで，$\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=k$ とおくと，$y=-\sqrt{2}x+k+\sqrt{2}$ ……④から，$z=2$ 上で傾き $-\sqrt{2}$ の直線群を表す。そして，k のとりうる値は，直線④が右上図の弧 EF と共有点をもつ範囲として求められる。



まず，線分 DE は直線④と垂直であることに注目して，直線④が点 E を通るとき，

$$k=\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+0-\sqrt{2}=2$$

また，直線④が点 F を通るとき，

$$k=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+0-\sqrt{2}=-2$$

これより，k のとりうる値の範囲は $-2\leqq k\leqq 2$ となるので，

$$-2\leqq\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}\leqq 2$$

［解 説］

空間図形と最大・最小を組み合わせた問題です。ただ，直線 AB が z 軸に平行であるように問題が設定されているため，見かけよりは穏やかです。なお，(3)の円錐側面の扱い方については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{12}$ ［信州大・医］

3 つの自然数 p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となるような p がただ 1 つ存在することを示せ。

$\boxed{12}$ ［信州大・医］

自然数 p が素数のとき，$p+10$，$p+20$ に対して，

(i) $p=2$ のとき $p+10=12$ は素数でない。

(ii) $p=3$ のとき $p+10=13$，$p+20=23$ となり，ともに素数である。

(iii) $p\geqq 5$ のとき l を 2 以上の自然数として，$p=3l-1$，$p=3l+1$ とおくと，

・$p=3l-1$ のとき $p+10=3l+9=3(l+3)$ は，3 の倍数で素数でない。

・$p=3l+1$ のとき $p+20=3l+21=3(l+7)$ は，3 の倍数で素数でない。

(i)～(iii)より，自然数 p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となるのは $p=3$ だけである。

［解 説］

ヒントなしの整数問題です。このようなときは実験をするしかなく，p の値を 2, 3, 5, 7, 11, 13, …として，$p+10$，$p+20$ の値を計算しました。そうすると，3 の倍数が現れてくることがわかり，これをもとに解答例を作成したわけです。なお，類題が気になったので調べたところ，2013 年の阪大・理系にありました。

13 ［一橋大］

n を 2 以上 20 以下の整数, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする。

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1}) $$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ。

$\boxed{13}$ ［一橋大］

整数 $n\,(2\leqq n\leqq 20)$, $k\,(1\leqq k\leqq n-1)$ に対し，${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1}=2({}_n\mathrm{C}_{k-1}+{}_n\mathrm{C}_{k+1})$ のとき，

$$\frac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)!}=\frac{2n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{2n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{k(k+1)(n-k)(n-k+1)}=\frac{2}{(n-k)(n-k+1)}+\frac{2}{k(k+1)}$$

これより，$(n+1)(n+2)=2k(k+1)+2(n-k)(n-k+1)$ となり，

$$n^2+3n+2=2k(k+1)+2\{n^2-(2k-1)n+k(k-1)\}$$

$$n^2-(4k+1)n+(4k^2-2)=0$$

すると，$n^2-4kn+4k^2=n+2$ より，$(n-2k)^2=n+2\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，$4\leqq n+2\leqq 22$ より，$(*)$を満たす n は，$n+2=4,\ 9,\ 16$ となる。

(i)　$n+2=4\ (n=2)$ のとき

$(*)$から $(2-2k)^2=4$ となり，$2-2k=\pm 2\ (1\leqq k\leqq 1)$ から不適である。

(ii)　$n+2=9\ (n=7)$ のとき

$(*)$から $(7-2k)^2=9$ となり，$7-2k=\pm 3\ (1\leqq k\leqq 6)$ から $k=2,\ 5$ である。

(iii)　$n+2=16\ (n=14)$ のとき

$(*)$から $(14-2k)^2=16$ となり，$14-2k=\pm 4\ (1\leqq k\leqq 13)$ から $k=5,\ 9$ である。

(i)～(iii)より，$(n,\ k)=(7,\ 2),\ (7,\ 5),\ (14,\ 5),\ (14,\ 9)$ である。

［解 説］

二項係数が題材の整数問題ですが，解答例では，計算で押し通しました。平方数に着目した$(*)$の式への変形がポイントです。

14　　［東京工大］

方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ ［東京工大］

整数 x, y に対して，$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ より，

$$\{(x-1)x(x+1)\}^2(y-1)y(y+1)=2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$(x-1)x(x+1)$，$(y-1)y(y+1)$ は連続 3 整数の積より 6 の倍数となり，

$$(x-1)x(x+1)=6k,\ (y-1)y(y+1)=6l\ \ (k\text{ は整数, } l\text{ は正の整数})$$

①に代入すると $6^3k^2l=2^7\cdot 3^3\cdot 5^2$ となり，$k^2l=2^4\cdot 5^2\ \cdots\cdots\cdots ②$

すると，k^2 は $2^4\cdot 5^2$ の正の約数となり，$k^2=1,\ 2^2,\ 2^4,\ 5^2,\ 2^2\cdot 5^2,\ 2^4\cdot 5^2$

(i)　$k^2=1$ のとき　②より $l=2^4\cdot 5^2=400$ となり，$(y-1)y(y+1)=2400$

$12\cdot 13\cdot 14=2184$，$13\cdot 14\cdot 15=2730$ より，自然数 y は存在しない。

(ii)　$k^2=2^2$ のとき　②より $l=2^2\cdot 5^2=100$ となり，$(y-1)y(y+1)=600$

$7\cdot 8\cdot 9=504$，$8\cdot 9\cdot 10=720$ より，自然数 y は存在しない。

(iii)　$k^2=2^4$ のとき　②より $l=5^2=25$ となり，$(y-1)y(y+1)=150$

$4\cdot 5\cdot 6=120$，$5\cdot 6\cdot 7=210$ より，自然数 y は存在しない。

(iv)　$k^2=5^2$ のとき　②より $l=2^4=16$ となり，$(y-1)y(y+1)=96$

$3\cdot 4\cdot 5=60$，$4\cdot 5\cdot 6=120$ より，自然数 y は存在しない。

(v)　$k^2=2^2\cdot 5^2$ のとき　②より $l=2^2=4$ となり，$(y-1)y(y+1)=24\ (y>0)$

$2\cdot 3\cdot 4=24$ より $y=3$ となり，$k=\pm 2\cdot 5=\pm 10$ から $(x-1)x(x+1)=\pm 60$

$3\cdot 4\cdot 5=60$，$(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)=-60$ より，$x=\pm 4$

(vi)　$k^2=2^4\cdot 5^2$ のとき　②より $l=1$ となり，$(y-1)y(y+1)=6\ (y>0)$

$1\cdot 2\cdot 3=6$ より $y=2$ となり，$k=\pm 2^2\cdot 5=\pm 20$ から $(x-1)x(x+1)=\pm 120$

$4\cdot 5\cdot 6=120$，$(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)=-120$ より，$x=\pm 5$

(i)～(vi)より，①を満たす整数 $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(\pm 4,\ 3)$，$(\pm 5,\ 2)$ である。

［解　説］

不定方程式を解く問題です。いろいろな解法があるでしょうが，86400 が 6^3 の倍数であることに注目し，連続 3 整数の積が 6 の倍数であることを利用しています。

15　［大阪公大・文］

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$をそれぞれ$a_n=\dfrac{5^{2^{n-1}}-1}{2^{n+1}}$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。ただし，$5^{2^{n-1}}$は5の2^{n-1}乗を表す。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3を求めよ。

(2)　すべての自然数nについてb_nは整数であることを示せ。

(3)　すべての自然数nについてa_nは整数であることを示せ。

(4)　すべての自然数nについてa_nは奇数であることを示せ。

15　　［大阪公大・文］

(1)　$a_n = \dfrac{5^{2^{n-1}}-1}{2^{n+1}}$ に対して，$a_1 = \dfrac{5^1-1}{2^2} = 1$，$a_2 = \dfrac{5^2-1}{2^3} = 3$，$a_3 = \dfrac{5^4-1}{2^4} = 39$

(2)　$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{5^{2^n}-1}{2^{n+2}} \cdot \dfrac{2^{n+1}}{5^{2^{n-1}}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5^{2^n}-1}{5^{2^{n-1}}-1}$ となる。

ここで，$m = 2^{n-1}$ とおくと，$2^n = 2^{n-1+1} = 2^{n-1} \cdot 2^1 = 2m$ であり，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2^n}-1}{5^{2^{n-1}}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2m}-1}{5^m-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(5^m)^2-1}{5^m-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(5^m+1)(5^m-1)}{5^m-1} = \frac{1}{2}(5^m+1)$$

よって，$b_n = \dfrac{1}{2}(5^m+1) = \dfrac{1}{2}\left(5^{2^{n-1}}+1\right)$ となる。

すると，すべての自然数 n について，$m = 2^{n-1}$ は整数になるので $5^m = 5^{2^{n-1}}$ は奇数，そして $5^m + 1 = 5^{2^{n-1}} + 1$ は偶数になることより，b_n は整数である。

(3)　$a_1 = 1$ は整数であり，また $a_{n+1} = b_n a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ なので，$n \geqq 2$ で，

$$a_n = a_1 b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} = b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1} \cdots\cdots\cdots (*)$$

(2)から b_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は整数なので，a_n は整数である。

(4)　すべての自然数 n について，$m = 2^{n-1}$ は自然数になるので，

$$5^m + 1 = (4+1)^m + 1 = \left(\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k 4^k\right) + 1 = \left(\sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k 4^k\right) + {}_m\mathrm{C}_0 + 1$$

すると，N を自然数として，$5^m + 1 = 4N + {}_m\mathrm{C}_0 + 1 = 4N + 2$ とおくことができ，

$$b_n = \frac{1}{2}(4N+2) = 2N+1$$

したがって，$a_1 = 1$ は奇数で，$(*)$から $n \geqq 2$ で a_n も奇数になることより，すべての自然数 n について a_n は奇数である。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題です。(2)で指数部分の処理が面倒と感じるときは，解答例のように置換えをした方がよいでしょう。また，(3)までの流れから，(4)は 5^m+1 が 4 の倍数でない偶数ということを示せばよいことになります。

$\boxed{16}$ ［信州大・医］

数字の 1 が書かれたカードが 2 枚，2 が書かれたカードが 3 枚，3 が書かれたカードが 4 枚の計 9 枚のカードがある。この 9 枚のカードのすべてを横一列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) 並べ方は全部で何通りあるか。

(2) 数字の 3 が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

(3) 同じ数字が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

$\boxed{\mathbf{16}}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

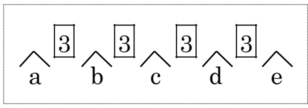
(1)　1 のカード 2 枚，2 のカード 3 枚，3 のカード 4 枚の計 9 枚を横一列に並べる。

この並べ方の総数は，$\dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$ 通りである。

(2)　3 のカードが隣り合わないのは，まず 1 のカード 2 枚と 2 のカード 3 枚の計 5 枚を並べ，それらのカードの間または両端の 6 か所から 4 か所を選んで 3 のカードをさし込むと考える。すると，この並べ方は，

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}\times{}_6\mathrm{C}_4=10\times 15=150\ \text{（通り）}$$

(3)　同じ数字のカードが隣り合わないのは，まず 3 のカード 4 枚を並べ，それらのカードの間または両端の位置を右図のように，a, b, c, d, e とおく。そして，a～e に 1 のカード 2 枚，2 のカード 3 枚を，同じ数字が隣り合わないようにさし込むと考える。



さて，9 枚のカードを並べたとき，両端のカードに着目して，

(i)　両端が 3 のカードのとき　b, c, d に，1 と 2 のカードをさし込む。

・$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$3!=6$（通り）

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$3!=6$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

よって，$3+6+3+6+3=21$ 通りとなる。

(ii)　右端のみ 3 のカードのとき　a, b, c, d に，1 と 2 のカードをさし込む。

・$\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

・$\boxed{2}\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むとき　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，$12+12=24$ 通りとなる。

(iii)　左端のみ 3 のカードのとき　b, c, d, e に，1 と 2 のカードをさし込む。

(ii)と同様に 24 通りとなる。

(iv)　両端が 3 のカードでないとき　a, b, c, d, e に，1 と 2 のカードをさし込む。

$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$ の形でさし込むので，$\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$（通り）

(i)～(iv)より，同じ数字のカードが隣り合わない並べ方は，

$$21+24+24+10=79\ \text{（通り）}$$

［解 説］

やや難しめの順列の問題です。(3)は枚数の多い 3 のカードをまず並べ，1 と 2 のカードをさし込むと考えました。そして，両端のカードを基準に場合分けをしています。

17 ［熊本大・医］

n を 3 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 60 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ。

17　　［熊本大・医］

(1)　1 個のさいころを 3 回投げて，出た目の数の積が $60=2^2\times3\times5$ となるのは，出た目の数が $\{2,\ 5,\ 6\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$ のときであり，その確率 p_3 は，

$$p_3=3!\times\left(\frac{1}{6}\right)^3+3!\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{18}$$

(2)　$n\geqq4$ のとき，1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積が 60 となるのは，出た目の数について，

(i)　$\{2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1\}$ (1 は $n-3$ 回)のとき

(ii)　$\{3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1\}$ (1 は $n-3$ 回)のとき

(iii)　$\{2,\ 2,\ 3,\ 5,\ 1,\ \cdots,\ 1\}$ (1 は $n-4$ 回)のとき

(i)～(iii)より，この確率 p_n は，

$$p_n=\frac{n!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{n!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{n!}{2!\,(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\left\{2n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)\right\}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(4+n-3)\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{2}(n+1)n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3)　$n\geqq4$ のとき，出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となるのは，

(a)　n 回目が 2 のとき　(2)の(i)と(iii)の場合より，このときの確率は，

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}+\frac{(n-1)!}{(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\{(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)(n-3)\}\left(\frac{1}{6}\right)^n=(n-1)(n-2)^2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(b)　n 回目が 3 のとき　(2)の(ii)と(iii)の場合より，このときの確率は，

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}+\frac{(n-1)!}{2!\,(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\left\{(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)\right\}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(c)　n 回目が 4 のとき　(2)の(ii)の場合より，このときの確率は，

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(d)　n 回目が 5 のとき　(2)の(i)と(ii)と(iii)の場合より，このときの確率は，

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}+\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}+\frac{(n-1)!}{2!\,(n-4)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\left\{2(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)\right\}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n+1)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(e)　n 回目が 6 のとき　(2)の(i)の場合より，このときの確率は，

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

(a)～(e)より，出た目の積が n 回目にはじめて 60 となる確率 q_n は，

$$\begin{aligned} q_n &= (n-1)(n-2)^2\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n+(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &\quad +\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n+1)\left(\frac{1}{6}\right)^n+(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\{2(n-2)+(n-1)+2+(n+1)+2\}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\cdot 4n\left(\frac{1}{6}\right)^n=2n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)は n 回目が 1 という場合は，条件にあてはまらないという点に着目しています。

18 ［広島大］

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

(1) $X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ。

(2) X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3) X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4) X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　$N \geqq 4$ のとき, 1 から N までの番号の書かれた N 枚のカードが入っている箱から, 1 枚取り出してはもとに戻すという試行を 4 回行うと, N^4 通りの場合が同様に確からしい。そして, 取り出したカードの番号を, 順に X, Y, Z, W とする。

$X=Y=Z=W$ となるのは N 通りの場合があり, この確率は $\dfrac{N}{N^4}=\dfrac{1}{N^3}$ となる。

(2)　X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなるのは ${}_N\mathrm{P}_4$ 通りの場合があり, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_4}{N^4}=\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4}=\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$$

(3)　X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号であるのは, 1 から N までから 2 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 3 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 を選び $X=Y=Z$ と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!$ 通りの場合があるので, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!}{N^4}=\frac{4N(N-1)}{N^4}=\frac{4(N-1)}{N^3}$$

(4)　X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなるのは, 1 から N までから 3 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 2 つと 1 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 と 3 を選び $X=Y$ と Z と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!$ 通りの場合があるので, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!}{N^4}=\frac{6N(N-1)(N-2)}{N^4}=\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)と(4)は, 解答例に触れているように, 具体例を考えて場合の数を計算しています。

19 ［神戸大・理］

n を 2 以上の整数とする。袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている。以下の問いに答えよ。

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ。

19 ［神戸大・理］

(1) 1から$2n$までの整数が書いてある$2n$枚のカードが入っている袋がある。

袋から同時に2枚のカードを取り出したとき，その数の和が偶数である確率は，

(i) 2枚とも偶数のとき $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$

(ii) 2枚とも奇数のとき $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{n-1}{2(2n-1)}+\dfrac{n-1}{2(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2n-1}$ である。

(2) $n\geqq 3$において，袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，その数の和が偶数である確率は，

(i) 3枚とも偶数のとき

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{6}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{4(2n-1)}$$

(ii) 1枚が偶数で2枚が奇数のとき

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{n^2(n-1)}{2}\cdot\frac{6}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{3n}{4(2n-1)}$$

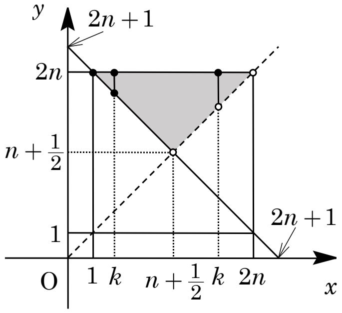
(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{n-2}{4(2n-1)}+\dfrac{3n}{4(2n-1)}=\dfrac{4n-2}{4(2n-1)}=\dfrac{1}{2}$ である。

なお，$n=2$のとき和が偶数である確率は$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{2}$であり，成り立っている。

(3) 袋から同時に2枚のカードを取り出したとき，その数をx, yとおくと，その和が$2n+1$以上であるのは，

$$x+y\geqq 2n+1\quad(1\leqq x<y\leqq 2n)$$

この領域を図示すると右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



ここで，網点部内の格子点の個数Nを数えると，

・$1\leqq k\leqq n$のとき，$x=k$上の格子点の個数N_kは，

$$N_k=2n-(2n+1-k)+1=k$$

・$n+1\leqq k\leqq 2n$のとき，$x=k$上の格子点の個数N_kは，$N_k=2n-k$

すると，$N=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}N_k=\sum_{k=1}^{n}N_k+\sum_{k=n+1}^{2n}N_k$ なので，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n=n^2$$

以上より，求める確率は，$\dfrac{N}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=n^2\cdot\dfrac{2}{2n(2n-1)}=\dfrac{n}{2n-1}$ である。

［解 説］

確率の標準的な問題です。(1)と(2)は基本タイプです。(3)では条件を不等式で表された領域内の格子点を対応させて，場合の数を視覚的に数えています。ただ，$x=k$ 上よりは $y=k$ 上で数えた方がよかったような……。

$\boxed{20}$ ［岡山大・理］

箱の中に, 1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり, 全部で 9 枚入っている。A, B, C の 3 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A と B が 2 枚ずつ, C が 3 枚取り出すとき, 以下の問いに答えよ。

(1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2) A がもつ札の数字が異なり, B がもつ札の数字も異なり, かつ, C がもつ札の数字もすべて異なる確率を求めよ。

(3) A がもつ札の数字のいずれかが, C がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。

20 ［岡山大・理］

(1) 1, 2, 3 の札がそれぞれ 3 枚ずつ入っている箱から, A が 2 枚の札を取り出すとき, ${}_9C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとすると, 取り出した 2 枚の数字が同じであるのは ${}_3C_1\times{}_3C_2$ 通りとなり, その確率は,

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

(2) C が 3 枚取り出し, 次に A が 2 枚取り出し, さらに B が 2 枚取り出すと考える。

まず, C がもつ札の数字がすべて異なるのは, 1, 2, 3 の札を 1 枚ずつ取り出したときで, その確率は $\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_9C_3}=\frac{3\times3\times3}{84}=\frac{9}{28}$ である。

次に, A がもつ札の数字がすべて異なるのは, 1, 2, 3 の札が 2 枚ずつ入っている箱から, 1 の札を 2 枚, 2 の札を 2 枚, 3 の札を 2 枚取り出した場合を除けばよく, その確率は $1-\frac{{}_2C_2+{}_2C_2+{}_2C_2}{{}_6C_2}=1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$ である。

さらに, B がもつ札の数字がすべて異なるのは, たとえば A が 1 と 2 の札を 1 枚ずつ取り出した場合は, 1, 2, 3, 3 の札が入っている箱から, 3 の札を 2 枚取り出した場合を除けばよい。A が 1 と 3 の札を 1 枚ずつ, 2 と 3 の札を 1 枚ずつ取り出した場合も同じであり, その確率はいずれも $1-\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ である。

したがって, A がもつ札の数字が異なり, B がもつ札の数字も異なり, C がもつ札の数字もすべて異なる確率は, $\frac{9}{28}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{3}{14}$ である。

(3) A が 2 枚取り出し, 次に C が 3 枚取り出すと考える。

まず, A の札の数字と C の札の数字がすべて異なる場合について考え, (1)の結果を用いると,

(i) A の札の数字が同じとき

C は A の札の数字以外の 6 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\frac{1}{4}\times\frac{{}_6C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{4}\times\frac{20}{35}=\frac{20}{140}$$

(ii) A の札の数字が異なるとき

C は A の札の数字以外の 3 枚から 3 枚を取り出すことになり, その確率は,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{3}{140}$$

(i)(ii)より, A の札の数字と C の札の数字がすべて異なる確率は,

$$\frac{20}{140}+\frac{3}{140}=\frac{23}{140}$$

したがって, A の札の数字のいずれかが, C の札の数字のいずれかと同じ確率は,

$$1-\frac{23}{140}=\frac{117}{140}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)は，場合分けを避けるために C→A→B の順に取り出したと考えています。また，(3)は余事象の利用がポイントです。

$\boxed{21}$ ［大阪公大・理］

A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる。2 人はじゃんけんをして，下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う。

・A は勝ったら 1 段のぼり，あいこか負けた場合，同じ段にとどまる。

・B はグー，チョキで勝ったら 1 段のぼり，パーで勝ったら 3 段のぼる。また，あいこか，グー，チョキで負けた場合，同じ段にとどまる。パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る (すでに一番下の段にいる場合はとどまる)。

A, B ともに$\dfrac{1}{3}$ずつの確率でグー，チョキ，パーを出すものとし，すべての試行は独立とする。2 回目以降のゲームは，2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする。階段の一番下の段を 0 段目とし，そこから m 段のぼった段を m 段目とする。次の問いに答えよ。

(1) n は自然数とし，m は$0 \leqq m \leqq n$ である整数とする。n 回のゲームを終えた結果，A が m 段目にいる確率$x_{n,m}$を求めよ。

(2) m は 0 以上の整数とする。2 回のゲームを終えた結果，B が m 段目にいる確率 y_mを求めよ。

(3) n は自然数とする。n 回のゲームを終えた結果，B が 0 段目にいる確率z_nを求めよ。

21　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪公大・理］

(1)　1 回のゲームで, A が勝って 1 段のぼる確率は $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，あいこか負けて同じ段にとどまる確率は $\dfrac{3}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{2}{3}$ である。

　$0\leqq m\leqq n$ のとき, n 回のゲームを終えて, A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ は,

$$x_{n,m}={}_n\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

(2)　1 回のゲームで, B がのぼる段数についてまとめると, 右表のようになる。なお, $-m$ は 0 段目に戻ることを表す。

A＼B	グー	チョキ	パー
グー	$+0$	$+0$	$+3$
チョキ	$+1$	$+0$	$-m$
パー	$+0$	$+1$	$+0$

　2 回のゲームを終えて, B が m 段目にいる確率 y_m について,

・$m=0$ のとき

　1 回目を終えたとき, 0 段目, 1 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

$$y_0=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)^2+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{36}{81}+\frac{2}{81}+\frac{1}{81}=\frac{13}{27}$$

・$m=1$ のとき　1 回目を終えたとき, 0 段目, 1 段目にいる場合に分けると,

$$y_1=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{12}{81}+\frac{10}{81}=\frac{22}{81}$$

・$m=2$ のとき　1 回目を終えたとき, 1 段目にいる場合だけなので,

$$y_2=\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$$

・$m=3$ のとき　1 回目を終えたとき, 0 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

$$y_3=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{6}{81}+\frac{5}{81}=\frac{11}{81}$$

・$m=4$ のとき　1 回目を終えたとき, 1 段目, 3 段目にいる場合に分けると,

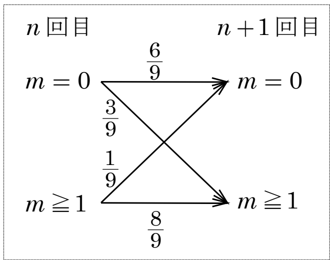
$$y_4=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{81}+\frac{2}{81}=\frac{4}{81}$$

・$m=6$ のとき　1 回目を終えたとき, 3 段目にいる場合だけなので,

$$y_6=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$$

・$m=5$，$m\geqq 7$ のとき　$0\leqq m\leqq 6$ かつ $m\neq 5$ より，$y_m=0$

(3)　n 回のゲームを終えて, B が 0 段目にいる確率 z_n について，$z_1=\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{3}$ であり，状態の推移図は右図のようになるので,



$$z_{n+1}=\frac{6}{9}z_n+\frac{1}{9}(1-z_n)=\frac{5}{9}z_n+\frac{1}{9}$$

$z_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{9}\left(z_n-\dfrac{1}{4}\right)$ と変形すると,

$$z_n-\frac{1}{4}=\left(z_1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

したがって，$z_n=\dfrac{5}{12}\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。(1)と(2)は具体的に計算するものの, (3)では考え方を切り替え, 漸化式を立てて処理をします。最近, ときどき出合う設問形式です。