1 ［大阪大］

r を正の実数とする。複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$z+w=zw$ を満たす点 w が描く図形を求めよ。

1 ［大阪大］

複素数平面上で，点 z は，点 $\frac{3}{2}$ を中心とする半径 r $(r>0)$ の円周上を動くことより，

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$z+w=zw$ を満たす点 w に対して，$(w-1)z=w\ \cdots\cdots\cdots②$

ここで，$w=1$ とすると，②は成り立たないので，$w\neq 1$ のもとで，

$$z=\frac{w}{w-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると，$\left|\frac{w}{w-1}-\frac{3}{2}\right|=r$ となり，$\left|\frac{-w+3}{2(w-1)}\right|=r$ から，

$$|-w+3|=r|2(w-1)|,\ |w-3|=2r|w-1|\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，④は $w\neq 1$ を満たしており，以下，$2r=1$ と $2r\neq 1$ に場合分けをして，点 w が描く図形を求める。

(i)　$2r=1\left(r=\frac{1}{2}\right)$ のとき

④より $|w-3|=|w-1|$ となるので，点 w が描く図形は，点 3 と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(ii)　$2r\neq 1\left(r\neq\frac{1}{2}\right)$ のとき

④より $|w-3|^2=4r^2|w-1|^2$ となり，$(w-3)(\overline{w}-3)=4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$ から，

$$(4r^2-1)w\overline{w}-(4r^2-3)w-(4r^2-3)\overline{w}=9-4r^2$$

$4r^2-1\neq 0$ より，$w\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\overline{w}=\frac{9-4r^2}{4r^2-1}$

$$\left(w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)\left(\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)=\left(\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)^2+\frac{9-4r^2}{4r^2-1}$$

$$\left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|^2=\frac{16r^2}{(4r^2-1)^2},\ \left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|=\frac{4r}{|4r^2-1|}$$

これより，点 w が描く図形は，中心が点 $\frac{4r^2-3}{4r^2-1}$ で半径が $\frac{4r}{|4r^2-1|}$ の円である。

［解　説］

複素数平面上の軌跡についての超頻出題です。今年は東京工大でも同じ趣旨の問題が出ています。

$\boxed{2}$ ［筑波大］

i は虚数単位とする。次の条件(I), (II)をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I) z の虚部は正である。

(II) 複素数平面上の点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(1-iz)$, $\mathrm{C}(z^2)$ は一直線上にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 でない複素数 α について，α の虚部が正であることは，$\dfrac{1}{\alpha-1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) $w=\dfrac{1}{z-1}$ とする。z が S を動くとき，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ の最小値を求めよ。

２　　　　［筑波大］

(1)　$\alpha=a+bi\ (\alpha\neq 1)$に対して，$\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{1}{(a-1)+bi}=\dfrac{(a-1)-bi}{(a-1)^2+b^2}$

これより，αの虚部 b が正であることと，$\dfrac{1}{\alpha-1}$の虚部$\dfrac{-b}{(a-1)^2+b^2}$が負であることは同値である。

(2)　集合 S は，虚部が正の複素数 z に対し，3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(1-iz)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が一直線上にある z 全体なので，まず k を実数として，

$$z^2-1=k(1-iz-1)\,,\ \ \frac{z^2-1}{-iz}=k$$

すなわち$\dfrac{z^2-1}{-iz}$は実数であり，$\dfrac{z^2-1}{-iz}=\overline{\left(\dfrac{z^2-1}{-iz}\right)}$から$\dfrac{z^2-1}{-iz}=\dfrac{(\overline{z})^2-1}{i\overline{z}}$となり，

$$\overline{z}(z^2-1)+z\{(\overline{z})^2-1\}=0\,,\ \ z\overline{z}(z+\overline{z})-(z+\overline{z})=0\,,\ \ (z\overline{z}-1)(z+\overline{z})=0$$

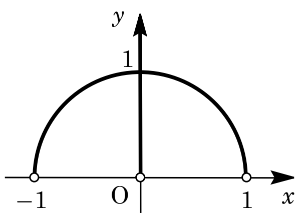
(i)　$z+\overline{z}=0$ のとき

z は純虚数となり，虚部が正の虚軸上の点である。

(ii)　$z\overline{z}-1=0$ のとき

$|z|^2=1$ となり $|z|=1$ である。すると，z は中心が原点の単位円周上にある虚部が正の点である。

(i)(ii)より，集合 S を図示すると，右図の太線部である。



(3)　$w=\dfrac{1}{z-1}$ とすると，(1)から w の虚部は負である。

また，$w(z-1)=1$ から $w\neq 0$ となり，$z-1=\dfrac{1}{w}$ から $z=1+\dfrac{1}{w}$ ………(＊)

(i)　$z+\overline{z}=0$ のとき

(＊)より，$1+\dfrac{1}{w}+1+\dfrac{1}{\overline{w}}=0$ となり，$2w\overline{w}+w+\overline{w}=0$ から $w\overline{w}+\dfrac{1}{2}w+\dfrac{1}{2}\overline{w}=0$

$$\left(w+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,,\ \ \left|w+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\,,\ \ \left|w+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

すると，w は中心が点$-\dfrac{1}{2}$で，半径が$\dfrac{1}{2}$の円周上にある虚部が負の点である。

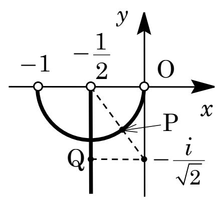
(ii)　$z\overline{z}-1=0$ のとき

$|z|=1$ から，(＊)より $\left|1+\dfrac{1}{w}\right|=1$ となり，$\left|\dfrac{w+1}{w}\right|=1$

$$\frac{|w+1|}{|w|}=1\,,\ \ |w+1|=|w|$$

すると，w は原点と点-1を結ぶ線分の垂直二等分線上にある虚部が負の点である。

(i)(ii)より，点 w の集合を図示すると，右図の太線部である。



さて，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$は点 w と点$-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$の距離を表し，この値が最小になるのは，点 w が右上図の点 P または点 Q に一致するときである。

すると，点$-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$と点 P との距離は$\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，点 Q との距離は$\dfrac{1}{2}$となり，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<\dfrac{1}{2}$より，求める最小値は$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$である。

［解　説］

複素数平面上の変換を題材にした標準的な問題です。(1)と(2)が(3)への巧みな誘導になっています。

$\boxed{3}$ 　　　　　　［新潟大］

複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(3) $|\beta|\leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|z|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β, z を求めよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=(z+\alpha)(\overline{z+\alpha})=|z+\alpha|^2$

(2)　$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$ ……①に対し，$\alpha=1+i+\beta$ とおくと，

$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=\alpha-1-i$，$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$

よって，$|z+\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i$ ……②となり，①を満たす z が存在する条件は，

$\alpha\overline{\alpha}+\alpha-1-i\geqq 0$ ………③

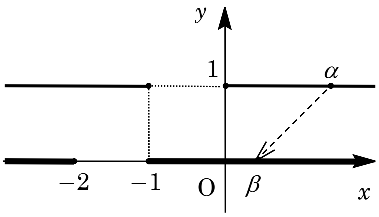
ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，$x^2+y^2+x+yi-1-i\geqq 0$ となり，

$x^2+y^2+x-1+(y-1)i\geqq 0$

これより，$x^2+y^2+x-1\geqq 0$ かつ $y-1=0$ となり，

$x^2+x\geqq 0$　かつ　$y=1$

まとめると，$y=1$ $(x\leqq -1,\ 0\leqq x)$ なので，複素数 α の範囲は右図の 2 つの半直線（細線）である。すると，$\beta=\alpha-1-i$ から，複素数 β の範囲は実軸上の 2 つの半直線（太線）となる。



(3)　$|\beta|\leqq 2$ として，複素数 z が①を満たすとき，(2)の結果から，$\beta=-2$ または $\beta=t$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ である。

(i)　$\beta=-2$ のとき　$\alpha=1+i-2=-1+i$ となり，②から，

$|z+\alpha|^2=\{(-1)^2+1^2\}+(-1+i)-1-i=0$

よって，$z=-\alpha=1-i$ から，$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ である。

(ii)　$\beta=t$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ のとき　$\alpha=1+i+t=(t+1)+i$ となり，②から，

$|z+\alpha|^2=\{(t+1)^2+1^2\}+(t+1+i)-1-i=(t+1)(t+2)$

これより，z は中心 $-\alpha=-(t+1)-i$ で，半径 $r=\sqrt{(t+1)(t+2)}$ の円周上の点となる。すると，$|z|$ が最大となるのは，原点 O，中心 $-\alpha$，点 z がこの順で一直線上に並ぶときであり，その最大値は $|-\alpha|+r$ である。

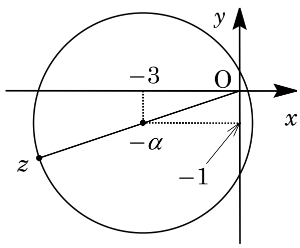
さて，$|-\alpha|=\sqrt{(t+1)^2+1}$，$r=\sqrt{t^2+3t+2}=\sqrt{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$ から，$-1\leqq t\leqq 2$ において $|-\alpha|$ と r はともに単調増加するので，$t=2$ のときに最大となり，

$|-\alpha|=\sqrt{(2+1)^2+1}=\sqrt{10}$

$r=\sqrt{2^2+3\cdot 2+2}=2\sqrt{3}$

よって，$|z|$ の最大値は，

$|-\alpha|+r=\sqrt{10}+2\sqrt{3}$



(i)(ii)より，$|z|$ の最大値は $\sqrt{10}+2\sqrt{3}$ である。

したがって，$|z|$が最大になるのは，$\beta=2$，$-\alpha=-3-i$のときであり，

$$z=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot(-3-i)=-\Big(1+\frac{\sqrt{30}}{5}\Big)(3+i)$$

［解 説］

複素数と図形に関する問題です。(3)は 2 つの文字についての最大問題なので，やや記述しにくいところがあります。

4　　［東京工大］

a, b を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする。a, b が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

4　　［東京工大］

実数 a, b が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たすとき，$f(z)=z^2+az+b$ に対し，$f(z)=0$ の解を $z=x+yi$ とおくと，$(x+yi)^2+a(x+yi)+b=0$ から，

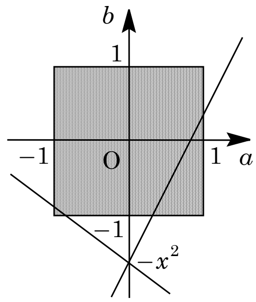
$$(x^2-y^2+ax+b)+(2x+a)yi=0$$

すると，$x^2-y^2+ax+b=0$ ……①，$(2x+a)y=0$ ……②が成り立ち，②より，

(i)　$y=0$ のとき

①から，$x^2+ax+b=0$ となり，$b=-xa-x^2$ ………③

ここで，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ のとき，x のとりうる範囲は，ab 平面上で直線③が右図の網点部の領域 $|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ と共有点をもつ x の条件に対応し，



(i-i)　$-1\leqq -x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ のとき

直線③は，つねに網点部と共有点をもつ。

(i-ii)　$-x^2<-1$ $(x<-1,\ 1<x)$ のとき

直線③は $(a,\ b)=(1,\ -x-x^2)$ および $(a,\ b)=(-1,\ x-x^2)$ を通ることより，網点部と共有点をもつ条件は，$-x-x^2\geqq -1$ ……④または $x-x^2\geqq -1$ ……⑤である。

④より，$x^2+x-1\leqq 0$ となり，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

⑤より，$x^2-x-1\leqq 0$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$x<-1$，$1<x$ と合わせると，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x<-1$，$1<x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(i-i)(i-ii)より，求める条件は $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(ii)　$y\neq 0$ のとき

②から $2x+a=0$ となり，$a=-2x$ ………⑥

⑥を①に代入すると，$x^2-y^2-2x^2+b=0$ から，$b=x^2+y^2$ ………⑦

ここで，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ より，$|-2x|\leqq 1$，$|x^2+y^2|\leqq 1$ となり，

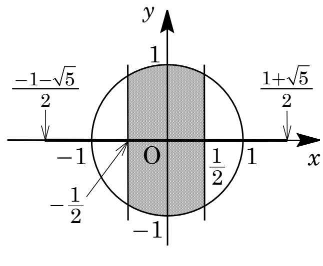
$$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ \ x^2+y^2\leqq 1$$

(i)(ii)より，$z=x+yi$ のとりうる値の範囲は，

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ y=0$$

$$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ \ x^2+y^2\leqq 1,\ \ y\neq 0$$

これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部および網点部になる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

複素数と 2 次方程式のついての標準的な問題です。初めは，方程式の解を実数と虚数に分け，解の公式を利用して処理をしましたが，記述量がかなり多めになりました。そこで，方針を変更したのが，上の解答例です。

5 ［名古屋大］

複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O, A, B, C, D, E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が，

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi,\ \ 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

$$2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ。

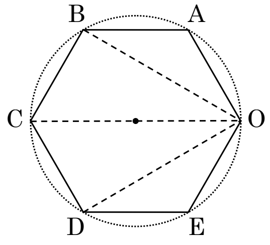
(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

(1)　条件から，$4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0\ (\alpha\neq 0)$ なので，

$$4-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=0,\ \ \frac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

$0\leqq\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ より，$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$



これより，点 β は点 α を原点 O まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，O との距離を 2 倍にした点である。

そこで，正六角形 OABCDE について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=l$ とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OD}=\sqrt{3}l$，$\mathrm{OC}=2l$ となるので，α は頂点 A，β は頂点 C が対応する。

(2)　(1)から，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{C}(\beta)$ となり，$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ より，

$$(2\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-1)=0$$

$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき，点 γ は $\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{C}(\beta)$ を結ぶ線分の中点になり，正六角形 OABCDE の頂点に対応しない。よって，$\gamma\neq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ から $\gamma=\alpha+1$ である。

さて，γ が対応する頂点は，点 B，点 D，点 E となり，

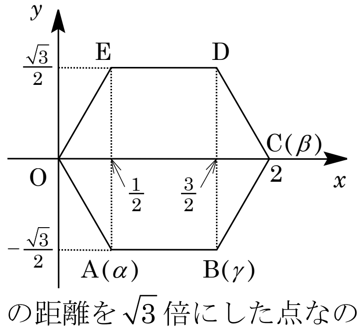
(i)　$\gamma=\alpha+1$ が点 B に対応するとき

点 B は点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，O との距離を $\sqrt{3}$ 倍にした点なので，$\alpha+1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\alpha=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$ より，$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2$$

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



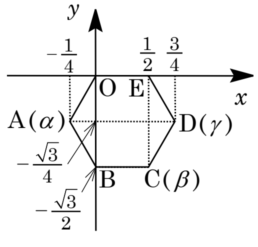
(ii)　$\gamma=\alpha+1$ が点 D に対応するとき

点 D は点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，O との距離を $\sqrt{3}$ 倍にした点なので，$\alpha+1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\alpha=\sqrt{3}i\cdot\alpha$ より，$(-1+\sqrt{3}i)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{1}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\gamma=\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)+1=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$



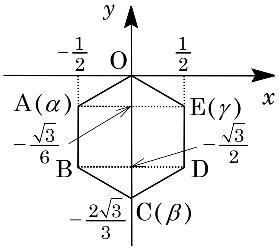
(iii) $\gamma=\alpha+1$ が点 E に対応するとき

点 E は点 A を原点 O のまわりに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点なので，
$\alpha+1=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\alpha=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$ より，$\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{2}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{2(-3-\sqrt{3}i)}{12}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$\beta=(1+\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}i$$

$$\gamma=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)+1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$



［解　説］

複素数平面上の図形についての問題です。うまく誘導が付けられていますが，ボリュームはかなりのものです。

$\boxed{6}$ ［神戸大］

a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

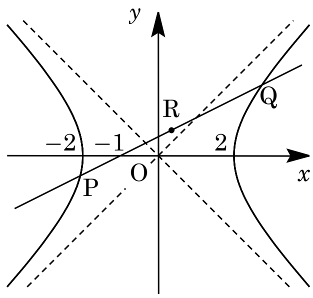
(2) $s,\, t$ の値を a を用いて表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) t の値を s を用いて表せ。

6　　　　［神戸大］

(1)　双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ ……①と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ ……②



が異なる 2 点 P, Q で交わる条件は，①②を連立して，

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(\sqrt{a}x+\sqrt{a})^2}{4}=1,\ \ x^2-a(x+1)^2=4$$

$$(a-1)x^2+2ax+a+4=0 \cdots\cdots③$$

$a>0$ において，③が異なる 2 実数解をもつ条件は，

$$a-1\neq 0,\ \ D/4=a^2-(a-1)(a+4)>0$$

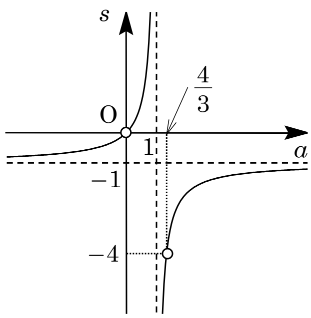
すると，求める a の値の範囲は $a\neq 1$ かつ $-3a+4>0$ から，

$$0<a<1,\ \ 1<a<\frac{4}{3}$$

(2)　$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{a}p+\sqrt{a})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{a}q+\sqrt{a})$ とし，線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とすると，

$$s=\frac{p+q}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a-1}=-\frac{a}{a-1},\ \ t=\sqrt{a}s+\sqrt{a}=-\frac{a\sqrt{a}}{a-1}+\sqrt{a}=-\frac{\sqrt{a}}{a-1}$$

(3)　(2)より，$s=-1-\frac{1}{a-1}$ となり，そのグラフを as 平面上に図示にすると右図のようになる。



ここで，(1)から，$0<a<1$，$1<a<\frac{4}{3}$ なので，

$$s<-4,\ \ 0<s$$

(4)　(2)から $s=\sqrt{a}t$ となり，$\sqrt{a}=\frac{s}{t}$ より $a=\frac{s^2}{t^2}$ ………④

また，$(a-1)s=-a$ なので $(s+1)a=s$ となり，④を代入すると，

$$(s+1)\frac{s^2}{t^2}=s,\ \ t^2=s(s+1)=s^2+s$$

(i)　$0<a<1$ $(s>0)$ のとき　$t>0$ から，$t=\sqrt{s^2+s}$

(ii)　$1<a<\frac{4}{3}$ $(s<-4)$ のとき　$t<0$ から，$t=-\sqrt{s^2+s}$

［解　説］

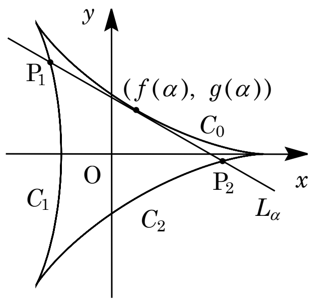
双曲線と直線を題材にした軌跡の問題です。文系に，双曲線を円として，同じ構図の出題がありました。

7 ［大阪公大］

実数 t に対して，

$$f(t)=2\cos t+\cos 2t,\ \ g(t)=2\sin t-\sin 2t$$

とおく。t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち，$0<t<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<t<2\pi$ の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とする。また，$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする。次の問いに答えよ。



C_0，C_1，C_2 の概形

(1) 次の等式を示せ。

$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(2) 次の等式を示せ。

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(3) 接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す。ただし $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。このとき，θ を α を用いて表せ。

(4) L_α と C_1 の交点を P_1 とし，L_α と C_2 の交点を P_2 とするとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さは α によらず一定であることを示せ。

７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪公大］

(1)　$f(t)=2\cos t+\cos 2t$，$g(t)=2\sin t-\sin 2t$ に対して，

$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=(2\cos t+\cos 2t)\sin\frac{\alpha}{2}+(2\sin t-\sin 2t)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\left(\sin t\cos\frac{\alpha}{2}+\cos t\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\left(\sin 2t\cos\frac{\alpha}{2}-\cos 2t\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①より，$f(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}+g(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3\alpha}{2}$ となり，

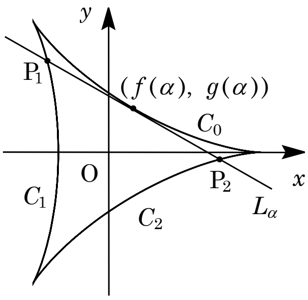
$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{3\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\frac{2t+\alpha}{2}\cos\frac{2t-2\alpha}{2}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cos(t-\alpha)=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\{1-\cos(t-\alpha)\}$$

$$=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin^2\frac{t-\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される曲線について，$0<t<\frac{2}{3}\pi$，$\frac{2}{3}\pi<t<\frac{4}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi<t<2\pi$ の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とすると，



$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{2\cos t-2\cos 2t}{-2\sin t-2\sin 2t}=-\frac{\cos t-\cos 2t}{\sin t+\sin 2t}$$

ここで，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ $\left(0<\alpha<\frac{2}{3}\pi\right)$ における C_0 の接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\tan\theta=-\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=-\frac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

すると，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{3}<-\frac{\alpha}{2}<0$ より，$\theta=-\frac{\alpha}{2}$ である。

(4)　(3)から，$L_\alpha: y-g(\alpha)=-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)(x-f(\alpha))$ となり，$x=f(t)$，$y=g(t)$ と連立すると，$g(t)-g(\alpha)=-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)(f(t)-f(\alpha))$ となり，

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

すると，②より，$4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)=0$ となり，

$$\sin\frac{t-\alpha}{2}=0\quad または\quad \sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)=0\cdots\cdots\cdots③$$

(i) $\dfrac{2}{3}\pi < t < \dfrac{4}{3}\pi$ のとき　$0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ から $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$0 < \frac{t-\alpha}{2} < \frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{2}{3}\pi < t + \frac{\alpha}{2} < \frac{5}{3}\pi$$

このとき，$\sin\dfrac{t-\alpha}{2} > 0$ となるので，③から $\sin\left(t + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$，すなわち $t + \dfrac{\alpha}{2} = \pi$ より $t = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$ である。すると，点 $\mathrm{P_1}$ の座標は,

$$\left(f\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right),\ g\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(-2\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha,\ 2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right)$$

(ii) $\dfrac{4}{3}\pi < t < 2\pi$ のとき　$0 < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ から $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$\frac{\pi}{3} < \frac{t-\alpha}{2} < \pi,\ \ \frac{4}{3}\pi < t + \frac{\alpha}{2} < \frac{7}{3}\pi$$

このとき，$\sin\dfrac{t-\alpha}{2} > 0$ となるので，③から $\sin\left(t + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$，すなわち $t + \dfrac{\alpha}{2} = 2\pi$ より $t = 2\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ である。すると，点 $\mathrm{P_2}$ の座標は,

$$\left(f\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right),\ g\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(2\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha,\ -2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\right)$$

(i)(ii)より，$\mathrm{P_1P_2}^2 = \left(4\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = 16\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 16$

したがって，$\mathrm{P_1P_2} = 4$ となり，線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の長さは α によらず一定である。

［解 説］

パラメータ曲線についての総合問題です。4 つの設問が 1 つのストーリーを描くように構成されています。ただ，計算量はかなりありますが。

8 ［東京医歯大］

xy 平面上の放物線 $P: y^2 = 4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり, A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A , n_B とする。a を正の数として, 点 A の座標を $(a, \sqrt{4a})$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

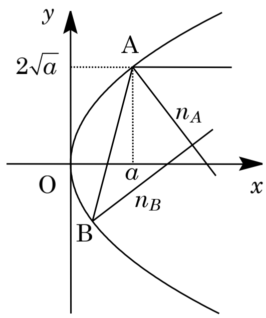
(1) n_A の方程式を a を用いて表せ。

(2) 直線 AB と直線 $y=\sqrt{4a}$ とがなす角の二等分線のひとつが, n_A に一致するとき, 直線 AB の方程式を a を用いて表せ。

(3) (2)のとき, 点 B を通る直線 r_B を考える。r_B と直線 AB とがなす角の二等分線のひとつが, n_B に一致するとき, r_B の方程式を a を用いて表せ。

(4) (3)のとき, 直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし, P と直線 $y=\sqrt{4a}$, 直線 $x=-1$ および(3)の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。a を変化させたとき, $\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。

8 ［東京医歯大］



(1) 放物線 $P: y^2=4x$ ……①に対し，$2y\dfrac{dy}{dx}=4$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\quad (y\neq 0)$$

さて，P 上の点 $\mathrm{A}(a,\ 2\sqrt{a})$ における法線 n_A は，その法線ベクトルの成分を $\left(1,\ \dfrac{2}{2\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{a},\ 1)$ とすると，その方程式は，$\sqrt{a}(x-a)+1\cdot(y-2\sqrt{a})=0$ となり，

$$\sqrt{a}x+y-(a+2)\sqrt{a}=0$$

(2) 直線 AB の単位方向ベクトルの成分を $(p,\ q)\ (p^2+q^2=1,\ q<0)$ とおく。

また，n_A の方向ベクトルの成分を $(1,\ -\sqrt{a})$，直線 $y=2\sqrt{a}$ の方向ベクトルの成分を $(1,\ 0)$ とすると，n_A は直線 AB と直線 $y=2\sqrt{a}$ とがなす角の二等分線の 1 つより，$(p,\ q)+(1,\ 0)=k(1,\ -\sqrt{a})\ (k>0)$ と表せ，

$$p+1=k,\ q=-\sqrt{a}k$$

これより，$q=-\sqrt{a}(p+1)$ となり，$k>0$ から $p+1>0$ であり，$p^2+q^2=1$ より，

$$p^2+a(p+1)^2=1,\ (p+1)(p-1)+a(p+1)^2=0$$

すると，$(p-1)+a(p+1)=0$ より，$(a+1)p+a-1=0$ となり，

$$p=-\frac{a-1}{a+1},\ q=-\sqrt{a}\left(-\frac{a-1}{a+1}+1\right)=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

これより，$(p,\ q)=-\dfrac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})$ となり，直線 AB は，法線ベクトルの成分を $(2\sqrt{a},\ -a+1)$ とすると，その方程式は，

$$2\sqrt{a}(x-a)+(-a+1)(y-2\sqrt{a})=0,\ 2\sqrt{a}x-(a-1)y-2\sqrt{a}=0\ \cdots\cdots\text{②}$$

(3) ①②を連立すると，$2\sqrt{a}\cdot\dfrac{y^2}{4}-(a-1)y-2\sqrt{a}=0$ より，

$$\sqrt{a}y^2-2(a-1)y-4\sqrt{a}=0,\ (y-2\sqrt{a})(\sqrt{a}y+2)=0$$

点 B は，$y\neq 2\sqrt{a}$ から $y=-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ となり，$x=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{a}=\dfrac{1}{a}$ より $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ -\dfrac{2}{\sqrt{a}}\right)$ である。

さて，点 B を通る直線 r_B の単位方向ベクトルの成分を $(s,\ t)\ (s^2+t^2=1,\ s>0)$ とおく。直線 AB の単位方向ベクトルの成分は $(-p,\ -q)=\dfrac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})$，$n_B$ の法線ベクトルの成分は $\left(1,\ -\dfrac{2\sqrt{a}}{2}\right)=(1,\ -\sqrt{a})$ から方向ベクトルの成分を $(\sqrt{a},\ 1)$ とすることができる。

そして，n_B は r_B と直線 AB とがなす角の二等分線の 1 つより，

$$\frac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})+(s,\ t)=l(\sqrt{a},\ 1)\quad (l>0)$$

すると，$\dfrac{a-1}{a+1}+s=\sqrt{a}l$，$\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}+t=l$ から，$\dfrac{a-1}{a+1}+s=\dfrac{2a}{a+1}+\sqrt{a}t$ となり，

$$s=\sqrt{a}t+1$$

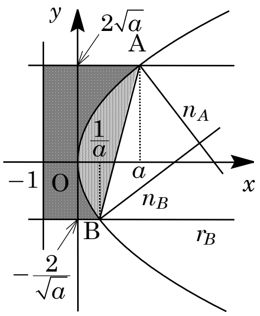
$l>0$ から $\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}+t>0$ であり，$s^2+t^2=1$ より，

$$(\sqrt{a}t+1)^2+t^2=1,\ (a+1)t^2+2\sqrt{a}t=0,\ t\{(a+1)t+2\sqrt{a}\}=0$$

$(a+1)t+2\sqrt{a}>0$ から $t=0$ となり，このとき $s=1$ から，$(s,\ t)=(1,\ 0)$

よって，r_B の方程式は，$y=-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ である。

(4) 直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1，P と直線 $y=2\sqrt{a}$，直線 $x=-1$ および r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，



$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\Big\{(a+1)+\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\Big\}\Big(2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\Big)$$

$$=\Big(a+\frac{1}{a}+2\Big)\Big(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)=\Big(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3$$

また，②より，AB : $x=\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1$ となり，

$$S_1=\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}\Big(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1-\frac{y^2}{4}\Big)dy=-\frac{1}{4}\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}(y-2\sqrt{a})\Big(y+\frac{2}{\sqrt{a}}\Big)dy$$

$$=-\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big(2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\Big)^3=\frac{8}{24}\Big(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3=\frac{1}{3}\Big(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3$$

これより，$S_2=\Big(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3-\dfrac{1}{3}\Big(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3=\dfrac{2}{3}\Big(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\Big)^3$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値は $\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

放物線の有名な性質を題材にした問題です。角の二等分線の扱いについては，いろいろな方法がありますが，場合分けを避けたかったので，解答例では，ひし形の対角線の性質を利用してベクトルで処理しました。ただ，計算量を考えるとタンジェントの方がよかったかもしれません。なお，(4)の結論は……。

$\boxed{9}$　　　　［九州大］

n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2)　(1)の A, B, C を n，α，β を用いて表せ。

(3)　(2)の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \to \alpha} A$ を求めよ。

9　［九州大］

(1)　3 以上の自然数 n，相異なる実数 α，β に対して，x^n を $(x-\alpha)(x-\beta)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$Q(x)$ は $n-3$ 次，$R(x)$ は 2 次以下の整式になり，

$$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+R(x)\cdots\cdots\cdots①$$

次に，$R(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの商は定数となるので A とし，余りは 1 次以下の整式なので $B(x-\alpha)+C$ とおくと，

$$R(x)=(x-\alpha)(x-\beta)A+B(x-\alpha)+C\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)^2Q(x)+A(x-\alpha)(x-\beta)+B(x-\alpha)+C\cdots\cdots\cdots③$

(2)　③に $x=\alpha$，$x=\beta$ を代入すると，$\alpha^n=C$，$\beta^n=B(\beta-\alpha)+C$ となり，

$$C=\alpha^n,\ \ B=\frac{\beta^n-C}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$$

次に，③の両辺を微分すると，

$$\begin{aligned}nx^{n-1}&=(x-\beta)^2Q(x)+2(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+(x-\alpha)(x-\beta)^2Q'(x)\\&\quad+A(x-\beta)+A(x-\alpha)+B\cdots\cdots\cdots④\end{aligned}$$

④に $x=\beta$ を代入すると，$n\beta^{n-1}=A(\beta-\alpha)+B$ となり，

$$A=\frac{n\beta^{n-1}-B}{\beta-\alpha}=\frac{n\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}-\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\beta-\alpha)^2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　⑤より，n と α を固定して，

$$\begin{aligned}A&=\frac{n\beta^{n-1}-(\beta^{n-1}+\alpha\beta^{n-2}+\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}\\&=\frac{(n-1)\beta^{n-1}-\alpha\beta^{n-2}-\alpha^2\beta^{n-3}-\cdots-\alpha^{n-2}\beta-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

ここで，$f(\beta)=(n-1)\beta^{n-1}-\alpha\beta^{n-2}-\alpha^2\beta^{n-3}-\cdots-\alpha^{n-2}\beta-\alpha^{n-1}$ とおくと，

$$f(\alpha)=(n-1)\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}-\cdots-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}=0$$

すると，$A=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ となり，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\alpha)\cdots\cdots\cdots⑥$

さて，$f'(\beta)=(n-1)^2\beta^{n-2}-(n-2)\alpha\beta^{n-3}-(n-3)\alpha^2\beta^{n-4}-\cdots-\alpha^{n-2}$ なので，

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=(n-1)^2\alpha^{n-2}-(n-2)\alpha^{n-2}-(n-3)\alpha^{n-2}-\cdots-\alpha^{n-2}\\&=\{(n-1)^2-(n-2)-(n-3)-\cdots-1\}\alpha^{n-2}\\&=\left\{(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}\alpha^{n-2}\\&=\frac{1}{2}(n-1)\{(2n-2)-(n-2)\}\alpha^{n-2}=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}\cdots\cdots\cdots⑦\end{aligned}$$

⑥⑦より，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}A=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$ となる。

［解 説］

整式の除法と極限の融合問題です。ポイントは，極限計算で微分係数の定義式に気づくことです。問題文に「n と α を固定して」と，それとなく誘導はついていますが。

$\boxed{10}$ ［広島大］

次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f(x)$ および m と k を(2)のように定める。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$ が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　$\sqrt{2}>1$ より $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<\sqrt{2}^{2}=2$ となり，$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}<\sqrt{2}^{2}=2$

また，$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{2}=2$ なので，$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}<\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ である。

(2)　$f(x)=\sqrt{2}^{x}$ のとき，$f'(x)=\sqrt{2}^{x}\log\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}^{x}\log 2$ となり，

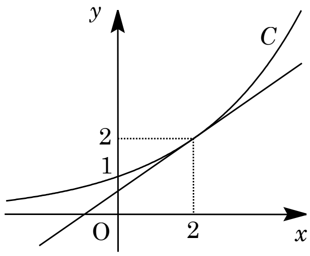
$$f(2)=\sqrt{2}^{2}=2,\quad f'(2)=\frac{1}{2}\sqrt{2}^{2}\log 2=\log 2$$

すると，点$(2,\ f(2))$における接線の方程式は，

$$y-2=(\log 2)(x-2),\quad y=(\log 2)x-2\log 2+2$$

この式が，$y=mx+k$ と一致することより，

$$m=\log 2,\quad k=-2\log 2+2$$



(3)　$g(x)=f(x)-(mx+k)=\sqrt{2}^{x}-(\log 2)x+2\log 2-2$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2}^{x}\log 2-\log 2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x}-2)\log 2$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，$g(x)\geqq 0$ から，$f(x)\geqq mx+k$ ……①である。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

(4)　$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)$ で定義される数列$\{a_n\}$に対し，①から，

$$f(a_n)\geqq ma_n+k,\quad a_{n+1}\geqq(\log 2)a_n-2\log 2+2$$

すると，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)(2-a_n)$ ………②

ここで，$a_n\leqq 2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\sqrt{2}<2$ で成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k\leqq 2$ と仮定すると，$a_{k+1}=\sqrt{2}^{a_n}\leqq\sqrt{2}^{2}=2$

(i)(ii)より，$a_n\leqq 2$ である。

したがって，②と合わせて，$0\leqq 2-a_{n+1}\leqq(\log 2)(2-a_n)$ となり，

$$0\leqq 2-a_n\leqq(2-a_1)(\log 2)^{n-1}=(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$0<\log 2<\log e=1$ から，$n\to\infty$ のとき$(\log 2)^{n-1}\to 0$ となるので，③より，

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=2$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。(4)は平均値の定理の出番かと思いましたが，図から明らかといってもよい(3)の不等式が利用できました。

11 ［大阪大］

$f(x)=\log(x+1)+1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を α とする。実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。このとき，すべての自然数 n に対して，$\alpha-x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha-x_n)$ が成り立つことを示せ。

(4)　(3)の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。

11　　［大阪大］

(1)　$f(x)=\log(x+1)+1$ に対して，$g(x)=f(x)-x=\log(x+1)+1-x$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となり，$g(x)$ は単調に減少する。

そして，$g(0)=1$，$g(3)=\log 4-2=\log 4-\log e^2<0$ より，$g(x)=0$ すなわち $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。

(2)　$f(\alpha)=\alpha$ として，$0<x<\alpha$ のとき，平均値の定理より，

$$\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}=\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}=f'(c)\quad(x<c<\alpha)\cdots\cdots\cdots①$$

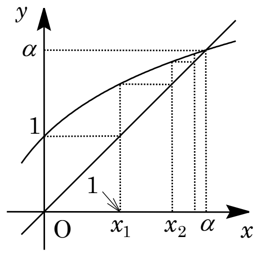
さて，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$ から，$f'(x)$ は単調に減少するので，$0<x<c<\alpha$ において，

$$f'(\alpha)<f'(c)<f'(x)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ なので，①②より，$0<\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)\cdots\cdots\cdots③$

(3)　$g(2)=\log 3-1=\log 3-\log e>0$，(1)から $g(3)<0$ なので，$2<\alpha<3$ である。

ここで，$x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ で定められた数列 $\{x_n\}$ に対し，まず $1\leqq x_n<\alpha$ であることを数学的帰納法で示す。



(i)　$n=1$ のとき

$x_1=1$ より，$1\leqq x_1<\alpha$ であり，$n=1$ のとき成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき

$1\leqq x_k<\alpha$ と仮定すると，$f(x)$ は単調に増加するので $f(1)\leqq f(x_k)<f(\alpha)$ となり，$f(1)-1=g(1)=\log 2>0$ なので，

$$1<f(x_k)<\alpha$$

$x_{k+1}=f(x_k)$ より，$1<x_{k+1}<\alpha$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$1\leqq x_n<\alpha$ である。

すると，③より，$0<\dfrac{\alpha-f(x_n)}{\alpha-x_n}<f'(x_n)$ となり，$\alpha-x_n>0$ から，

$$0<\alpha-f(x_n)<f'(x_n)(\alpha-x_n),\ 0<\alpha-x_{n+1}<f'(x_n)(\alpha-x_n)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$f'(x_n)=\dfrac{1}{x_n+1}$ であり，$0<\dfrac{1}{x_n+1}\leqq\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ なので，

$$0<f'(x_n)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)\cdots\cdots\cdots⑥$

(4)　$x_n<\alpha$ と合わせると，⑥より，$0<\alpha-x_n\leqq(\alpha-x_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

すると，$n\to\infty$ のとき，$(\alpha-x_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0$ から $\alpha-x_n\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

［解 説］

一般項が求めにくい漸化式で定められた数列について，その極限を求める問題です。平均値の定理を利用するという有名な方法が誘導で与えられています。

12 ［京都大］

曲線$C : y=\cos^3 x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

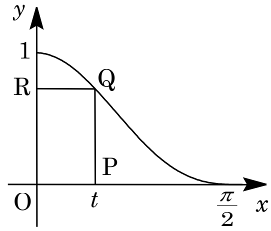
(1) S を求めよ。

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると，$f(\alpha)=\dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{9}{16}$ を示せ。

$\boxed{12}$ ［京都大］

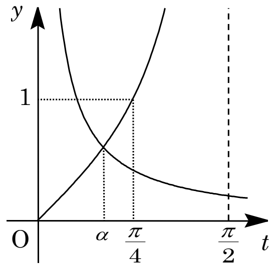
(1) 曲線$C: y=\cos^3 x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$と$x$軸，$y$軸で囲まれる図形の面積$S$は，



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\Big[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) $0<t<\frac{\pi}{2}$において，長方形OPQRの面積$f(t)$は，$f(t)=t\cos^3 t$となり，

$$f'(t)=\cos^3 t-3t\cos^2 t\sin t=\cos^2 t(\cos t-3t\sin t)$$
$$=3t\cos^3 t\Big(\frac{1}{3t}-\tan t\Big)$$



ここで，$y=\frac{1}{3t}$と$y=\tan t$のグラフを描くと右図のようになり，$0<t<\frac{\pi}{2}$においてただ１つの交点をもつ。

この交点を$t=\alpha$とおくと，$f(t)$の増減は右表のようになり，$f(t)$は最大値をただ１つのtでとる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

そして，$f'(\alpha)=0$から$\cos\alpha=3\alpha\sin\alpha$となり，$\alpha=\frac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$より，最大値は，

$$f(\alpha)=\alpha\cos^3\alpha=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3) ①②より，$\frac{f(\alpha)}{S}=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\cdot\frac{3}{2}=\frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{2\sin\alpha}$となり，$g(u)=\frac{(1-u^2)^2}{2u}$とおくと，$\frac{f(\alpha)}{S}=g(\sin\alpha)$である。ただし，$0<u<1$とする。

すると，$g(u)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u}-2u+u^3\Big)$から，

$$g'(u)=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{u^2}-2+3u^2\Big)=\frac{-1-2u^2+3u^4}{2u^2}=\frac{(3u^2+1)(u+1)(u-1)}{2u^2}$$

これより，$g'(u)<0$なので，$g(u)$は単調に減少する。

さて，$3.1<\pi<3.2$から$3\pi>3\times3.1=9.3>4$となり，$1=\tan\frac{\pi}{4}>\frac{4}{3\pi}$

また，$1.7<\sqrt{3}<1.8$から$\sqrt{3}\pi<1.8\times3.2=5.76<6$となり，$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}<\frac{6}{3\pi}$

よって，$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$から，$\frac{1}{2}<\sin\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$すなわち$\frac{1}{2}<u<\frac{\sqrt{2}}{2}$となり，

$$\frac{f(\alpha)}{S}<g\Big(\frac{1}{2}\Big)=\Big(\frac{3}{4}\Big)^2=\frac{9}{16}$$

［解 説］

微分と増減の問題です。(3)のポイントはαの評価式をつくることですが，この場面では，(2)で描いたグラフが役立ちます。

13 ［岡山大］

$-1<x<1$ に対して，$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ とおく。ただし，対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1<x<1$ のとき，$f'(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2) $-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$ であることを示せ。

(3) n が 2 以上の整数のとき，不等式 $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{13}$ ［岡山大］

(1) $-1<x<1$ のとき，$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$ に対して，

$$f(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x),\ f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{-1+x+1+2x+x^2}{(1+x)^2(1-x)}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

これより，$-1<x<1$ における $f'(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	0	↗	

すると，$f'(x)\geqq 0$ である。

(2) (1)より，$-1<x<1$ において，$f(x)$ は単調に増加する。ここで，$f(0)=0$ に注目すると，

$$f(x)<0\ (-1<x<0),\ f(x)>0\ (0<x<1)$$

よって，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$ である。

(3) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x}-\log(1-x)=\dfrac{\log(1-x^2)}{x}-\log(1-x)>0$ より，

$$\frac{\log(1-x^2)}{x}>\log(1-x)\quad(-1<x<1,\ x\neq 0)\cdots\cdots\cdots①$$

まず，2 以上の整数 n で $x=\dfrac{1}{n}$ とおくと，$0<x\leqq\dfrac{1}{2}<1$ となり，①より，

$$n\log\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)>\log\Big(1-\frac{1}{n}\Big),\ \log\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n>\log\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

これより，$\dfrac{n-1}{n}<\Big(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Big)^n\cdots\cdots\cdots②$

また，2 以上の整数 n で $x=-\dfrac{1}{n}$ とおくと，$-1<-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ となり，①より，

$$-n\log\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)>\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big),\ \log\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n<-\log\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

これより，$\Big(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Big)^n<\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{-1}=\dfrac{n}{n+1}$ となり，

$$\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^{n+1}<\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^2-1}{n^2},\ \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^{n+1}<\frac{n-1}{n}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\Big(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Big)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\Big(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Big)^n$ である。

［解 説］

微分の不等式への応用問題です。(2)までの証明はスムーズに進みますが，その結果を(3)の不等式に接続する点について試行錯誤が必要です。そこを突破するきっかけは，問題文で与えられた $f(x)$ の式に対する違和感でした。要演習の 1 題です。

14 ［信州大］

p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は，すべての実数 x について $f(x+p)=f(x)$ を満たし，$0 \leqq x \leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ であるとする。また，

$$I_k=\int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x} f(x)\,dx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $\dfrac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

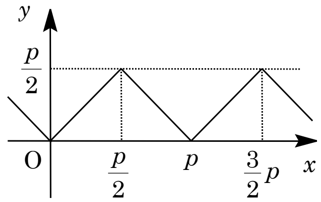
(3) n は自然数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{pn} e^{-x} f(x)\,dx$ を求めよ。

14　　　　［信州大］

(1)　$p>0$ のとき，$0\leqq x\leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ より，

(i)　$0\leqq x\leqq\dfrac{p}{2}$ のとき　$f(x)=\dfrac{p}{2}+\left(x-\dfrac{p}{2}\right)=x$

(ii)　$\dfrac{p}{2}\leqq x\leqq p$ のとき　$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)=-x+p$



また，すべての実数 x について，$f(x+p)=f(x)$

このとき，$I_k=\displaystyle\int_{p(k-1)}^{pk}e^{-x}f(x)dx$ とおくと，

$$I_1=\int_0^p e^{-x}f(x)dx=\int_0^{\frac{p}{2}}xe^{-x}dx+\int_{\frac{p}{2}}^{p}(-x+p)e^{-x}dx$$

$$=-\left[xe^{-x}\right]_0^{\frac{p}{2}}+\int_0^{\frac{p}{2}}e^{-x}dx-\left[(-x+p)e^{-x}\right]_{\frac{p}{2}}^{p}-\int_{\frac{p}{2}}^{p}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}}-\left[e^{-x}\right]_0^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}}+\left[e^{-x}\right]_{\frac{p}{2}}^{p}=-e^{-\frac{p}{2}}+1+e^{-p}-e^{-\frac{p}{2}}=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2$$

(2)　$t=x-p(k-1)$ とおくと，$dt=dx$ で，$x=p(k-1)\to pk$ は $t=0\to p$ となり，$f(x+p)=f(x)$ から，帰納的に $f(x+p(k-1))=f(x)$ となるので，

$$I_k=\int_0^p e^{-t-p(k-1)}f(t+p(k-1))dt=e^{-p(k-1)}\int_0^p e^{-t}f(t)dt=e^{-p(k-1)}I_1$$

よって，$\dfrac{I_k}{I_1}=e^{-p(k-1)}$ である。

(3)　$J_n=\displaystyle\int_0^{pn}e^{-x}f(x)dx$ とおくと，(1)(2)より，

$$J_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{p(k-1)}^{pk}e^{-x}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}I_k=I_1\sum_{k=1}^{n}e^{-p(k-1)}=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2\cdot\frac{1-e^{-pn}}{1-e^{-p}}$$

$n\to\infty$ のとき，$e^{-pn}\to 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}J_n=\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{1-e^{-p}}=\frac{\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)^2}{\left(1+e^{-\frac{p}{2}}\right)\left(1-e^{-\frac{p}{2}}\right)}=\frac{1-e^{-\frac{p}{2}}}{1+e^{-\frac{p}{2}}}$$

［解　説］

周期関数を題材にした定積分の問題です。さらに，無限級数との融合も問われている頻出題です。

$\boxed{15}$　　［名古屋大］

関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下，n は正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx = \infty$ を示せ。

(2)　区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $\displaystyle F_n(y) = \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty$ を示せ。また $2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}dx = 0$$

を満たすものがただ１つ存在することを示せ。

(3)　(2)の a_n について，不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ。

15 ［名古屋大］

(1)　$x \geqq 0$ で連続な増加関数 $f(x)$ が $f(0)=1$ を満たすとき，$0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において，

$f(x) \geqq 1$ より，$\dfrac{f(x)}{2-x} \geqq \dfrac{1}{2-x}$ となり，

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{2-x}dx = -\Big[\log|2-x|\Big]_0^{2-\frac{1}{n}} = \log n + \log 2 \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$n \to \infty$ のとき $\log n + \log 2 \to \infty$ より，①から，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx = \infty$$

(2)　$y>2$ において $F_n(y)=\displaystyle\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{x-2}dx$ と定めるとき，$2+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq y$ において，

$f(x) \geqq 1$ より，$\dfrac{f(x)}{x-2} \geqq \dfrac{1}{x-2}$ となり，

$$F_n(y) \geqq \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{1}{x-2}dx = \Big[\log|x-2|\Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y} = \log(y-2)+\log n \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$y \to \infty$ のとき $\log(y-2)+\log n \to \infty$ より，②から

$$\lim_{y\to\infty} F_n(y) = \infty \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$G_n(y)=\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{2-x}dx = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx - F_n(y)$ とおく。

すると，$y \geqq 2+\dfrac{1}{n}$ のとき，$G_n{}'(y) = -F_n{}'(y) = -\dfrac{f(y)}{y-2} < 0$ となり，$G_n(y)$ は単調に減少し，(1)から，

$$G_n\Big(2+\frac{1}{n}\Big) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx \geqq \log n + \log 2 > 0 \cdots\cdots\cdots④$$

また，③から，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} G_n(y) = \int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx - \lim_{y\to\infty} F_n(y) = -\infty$

よって，$2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で，$G_n(a_n)=0$ となるものがただ 1 つ存在する。

(3)　$G_n(4)=\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}dx + \int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx \cdots\cdots⑤$ となり，ここで $t=4-x$ とおくと，

$dt=-dx$ で，$x=2+\dfrac{1}{n} \to 4$ のとき $t=2-\dfrac{1}{n} \to 0$ となるので，

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}dx = \int_{2-\frac{1}{n}}^{0} \frac{f(4-t)}{t-2}\cdot(-dt) = -\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{2-t}dt$$

$$= -\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-x)}{2-x}dx \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥を⑤に代入して，

$$G_n(4)=\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}dx-\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(4-x)}{2-x}dx=\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)-f(4-x)}{2-x}dx$$

ここで，$0\leqq x\leqq 2-\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)$ は増加関数なので，$x<4-x$ から $f(x)<f(4-x)$ となり，$G_n(4)<0$ である。

すると，④と合わせて，$G_n(y)=0$ となる $y=a_n$ が $2+\dfrac{1}{n}<y<4$ にただ 1 つ存在することになる。すなわち，すべての n に対して $a_n<4$ である。

［解 説］

抽象的な関数を題材にした定積分の問題です。ポイントは，(3)の $t=4-x$ という変数変換です。これは，積分区間 $0\leqq x\leqq 2-\dfrac{1}{n}$ と $2+\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 4$ の対応を考えて，直線 $x=2$ に関する対称移動を表しています。

16　　［東京医歯大］

曲線 $C: y=f(x)$ $(0 \leqq x < 1)$ が次の条件を満たすとする。

・$f(0)=0$

・$0<x<1$ のとき $f'(x)>0$

・$0<a<1$ を満たすすべての実数 a について，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき，$\mathrm{PQ}=1$

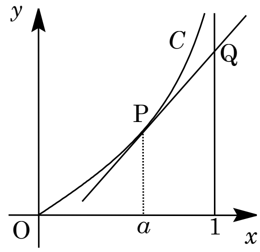
このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)f'(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　曲線 C と x 軸，直線 $x=1$，直線 $y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

16　　［東京医歯大］



(1)　$f(0)=0$ かつ $0<x<1$ で $f'(x)>0$ を満たす曲線 $C: y=f(x)\ (0\leqq x<1)$ に対し，条件より，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))\ (0<a<1)$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき，$\mathrm{PQ}=1$ が成り立つ。

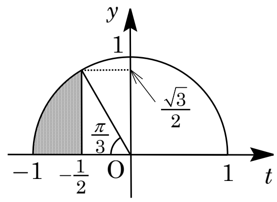
直線 PQ の傾きは $f'(a)$ より，$(1-a)\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}=1$

$$1+\{f'(a)\}^2=\frac{1}{(1-a)^2},\ \{f'(a)\}^2=\frac{2a-a^2}{(1-a)^2}$$

よって，$f'(a)=\dfrac{\sqrt{2a-a^2}}{1-a}$ となり，a は $0<a<1$ を満たす任意の実数なので，

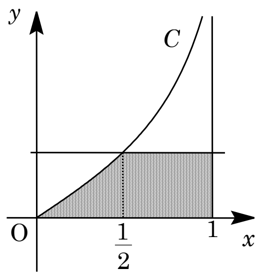
$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}$$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{-(x-1)^2+1}\,dx$ とする。



ここで，$x-1=t$ とおき，右図を参照すると，

$$I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$



(3)　曲線 C と x 軸，直線 $x=1$，直線 $y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\left(1-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

ここで，(2)より，

$$I=\Big[(1-x)f(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$$

したがって，$S=I=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ である。

［解 説］

抽象関数が題材の微積分の総合問題です。(3)は(2)が誘導と感じられますが，実際その通りでした。

17　　　　［信州大］

2 次の項の係数がともに正の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ について，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。また，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ を l とする。C_1 と l は点 $(0,\ 0)$ で，C_2 と l は点 $(4,\ 2)$ で接し，C_1 と C_2 は点 $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{22}{9}\right)$ で交わるとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2)　放物線 C_1 の $x \geqq 0$ の部分と放物線 C_2 および直線 l によって囲まれる図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ ［信州大］

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，$g(x)=px^2+qx+r\ (p>0)$ とおくとき，放物線 $C_1: y=f(x)$，$C_2: y=g(x)$，および直線 $l: y=\frac{1}{2}x$ に対して，

$$f'(x)=2ax+b,\ g'(x)=2px+q$$

まず，C_1 と l は点 $(0,\ 0)$ で接することより，$f(0)=c=0$，$f'(0)=b=\frac{1}{2}$ となり，

$$f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x \cdots\cdots\cdots ①$$

また，C_2 と l は点 $(4,\ 2)$ で接することより，

$$g(4)=16p+4q+r=2,\ g'(4)=8p+q=\frac{1}{2}$$

すると，$q=-8p+\frac{1}{2}$，$r=2-16p-4\left(-8p+\frac{1}{2}\right)=16p$ となり，

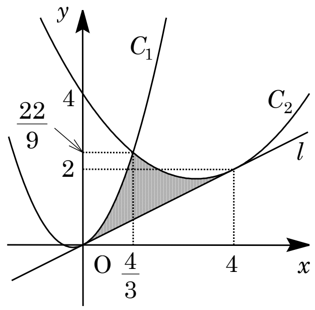
$$g(x)=px^2-\left(8p-\frac{1}{2}\right)x+16p \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{22}{9}\right)$ で交わることより，①②から，

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}a+\frac{2}{3}=\frac{22}{9},\ g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}p-\frac{4}{3}\left(8p-\frac{1}{2}\right)+16p=\frac{22}{9}$$

すると，$a=1$，$p=\frac{1}{4}$ となり，$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$，$g(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$ である。

(2)　C_1，C_2 および l によって囲まれる右図の網点部を y 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積 V は，



$$V=2\pi\int_0^{\frac{4}{3}} x\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx + 2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4} x\left\{g(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{4}{3}} x^3dx+2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4} x\left(\frac{1}{4}x^2-2x+4\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{4}{3}}+2\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}\frac{1}{4}x(x-4)^2dx=\frac{2^7}{3^4}\pi+\frac{1}{2}\pi\int_{\frac{4}{3}}^{4}x(x-4)^2dx$$

ここで，$t=x-4$ とおくと，$dt=dx$ で，$x=\frac{4}{3}\to 4$ は $t=-\frac{8}{3}\to 0$ となり，

$$\int_{\frac{4}{3}}^{4}x(x-4)^2dx=\int_{-\frac{8}{3}}^{0}(t+4)t^2dt=\int_{-\frac{8}{3}}^{0}(t^3+4t^2)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{4}{3}t^3\right]_{-\frac{8}{3}}^{0}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8^4}{3^4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{8^3}{3^3}=-\frac{2^{10}}{3^4}+\frac{2^{11}}{3^4}=\frac{2^{10}}{3^4}$$

よって，$V=\frac{2^7}{3^4}\pi+\frac{2^9}{3^4}\pi=\frac{2^7}{3^4}(1+4)\pi=\frac{640}{81}\pi$ である。

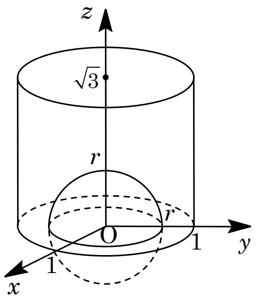
［解 説］

y 軸回転体の体積を求める問題です。網点部の形から円筒分割を利用しています。なお，計算量はやや多めです。

$\boxed{18}$ ［東北大］

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］



半径１の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱は,

$x^2+y^2 \leqq 1$　かつ　$0 \leqq z \leqq \sqrt{3}$ ………①

また, 半径が r の球は, $x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$ ………②

このとき, 直円柱の内部と球の内部の共通部分は, ①かつ②を yz 平面で切断し, この断面を z 軸のまわりに回転した立体になる。

そこで, yz 平面 $(x=0)$ での断面は,

$-1 \leqq y \leqq 1$　かつ　$0 \leqq z \leqq \sqrt{3}$　かつ　$y^2+z^2 \leqq r^2$

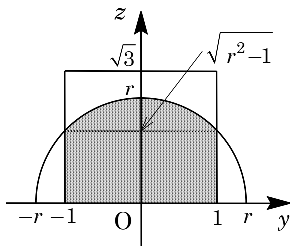
そして, 共通部分の体積を $V(r)$ とおくと,

(i)　$0<r \leqq 1$ のとき

共通部分は半球になるので, $V(r)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

(ii)　$1 \leqq r \leqq \sqrt{3}$ のとき

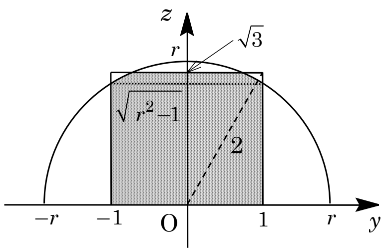
共通部分の $x=0$ での断面は右図の網点部となり,



$$
\begin{aligned}
V(r)&=\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r} y^2\,dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r}(r^2-z^2)dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big[r^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_{\sqrt{r^2-1}}^{r}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi r^2\big(r-\sqrt{r^2-1}\big)-\frac{\pi}{3}\big\{r^3-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\big\}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big(\frac{2}{3}r^3-\frac{2r^2+1}{3}\sqrt{r^2-1}\Big)=\pi\Big(\frac{2}{3}r^3-\frac{2r^2-2}{3}\sqrt{r^2-1}\Big)
\end{aligned}
$$

(iii)　$\sqrt{3} \leqq r \leqq 2$ のとき

共通部分の $x=0$ での断面は右図の網点部となり,



$$
\begin{aligned}
V(r)&=\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}} y^2\,dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}(r^2-z^2)dz\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big[r^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi r^2\big(\sqrt{3}-\sqrt{r^2-1}\big)-\frac{\pi}{3}\big\{3\sqrt{3}-(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\big\}\\
&=\pi\sqrt{r^2-1}+\pi\Big(\sqrt{3}r^2-\frac{2r^2+1}{3}\sqrt{r^2-1}-\sqrt{3}\Big)\\
&=\pi\Big(\sqrt{3}r^2-\frac{2r^2-2}{3}\sqrt{r^2-1}-\sqrt{3}\Big)
\end{aligned}
$$

(iv) $r \geqq 2$ のとき

共通部分は直円柱になるので，$V(r)=\pi\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$

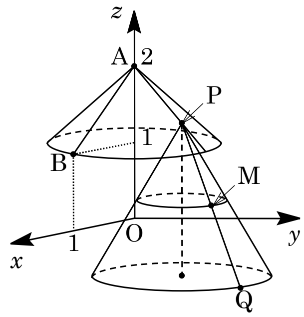
［解 説］

共通部分の体積の問題です。回転体の体積として計算できますので，場合分けは面倒ではありません。計算はやや難ですが。

19　　［東京大］

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

19　　［東京大］



点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる円錐側面 S 上の点を $\mathrm{P}(s,\ t,\ u)\ (1\leqq u\leqq 2)$ とおくと，$\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\cos\frac{\pi}{4}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(s,\ t,\ u-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,\ 0,\ -2)$ から，

$$-2(u-2)=\sqrt{s^2+t^2+(u-2)^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$1\leqq u\leqq 2$ から，両辺 2 乗すると，$2(2-u)^2=s^2+t^2+(u-2)^2$ となり，

$$s^2+t^2=(2-u)^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 P を固定すると，xy 平面上の点 Q は $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くことより，点 Q は P を頂点とする母線の長さが 2 の円錐の底面の円を描く。

さらに，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}(x,\ y,\ z)$ は，$\mathrm{PM}=1$ から，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ 上で，中心 $\left(s,\ t,\ \dfrac{u}{2}\right)$，半径 $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{u}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$ の円を描くので，

$$(x-s)^2+(y-t)^2=\frac{1}{4}(4-u^2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ 上で①②を満たす s, t が存在する条件は, st 平面上で 2 つの円①と②が共有点をもつ条件として求められる。

円①は中心 $(0,\ 0)$ で半径 $2-u$，円②は中心 $(x,\ y)$ で半径 $\dfrac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$ であり，2 円の中心間距離が $\sqrt{x^2+y^2}$ であることから，

$$\left|(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right|\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$$

$$\left\{(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2\leqq x^2+y^2\leqq\left\{(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより，中点 M が通過しうる範囲 K を，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ で切断した切り口は，③からドーナツ形になり，その面積を $S(z)$ とおくと，

$$S(z)=\pi\left\{(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2-\pi\left\{(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2$$

$$=2\pi(2-u)\sqrt{4-u^2}$$

よって，K の体積 V は，$z=\dfrac{u}{2}$ から，

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(z)dz=2\pi\int_1^2(2-u)\sqrt{4-u^2}\cdot\frac{1}{2}du=\pi\int_1^2(2-u)\sqrt{4-u^2}\,du$$

$$=2\pi\int_1^2\sqrt{4-u^2}\,du-\pi\int_1^2 u\sqrt{4-u^2}\,du$$

ここで，$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4-u^2}\,du=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_1^2 u\sqrt{4-u^2}\,du=\Big[-\frac{1}{3}(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2=-\frac{1}{3}\cdot(-3\sqrt{3})=\sqrt{3}$$

よって，$V=2\Big(\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)\pi-\sqrt{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi$ である。

［解　説］

通過領域の体積を求めるという頻出の問題です。上の解答例では，数式的な処理で解いています。