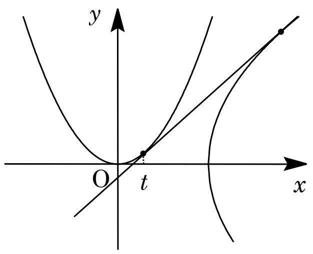
1 ［千葉大・理］

a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

1　　　　［千葉大・理］



放物線 $y=x^2$ ……①，$x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ ……②に対して，

①上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ から，

$$y-t^2=2t(x-t),\ \ y=2tx-t^2\ \cdots\cdots\text{③}$$

ここで，$t=0$ のときは③は $y=0$ となり，放物線②に接しないので，$t\neq 0$ のもとで，②③を連立して，

$$\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}=\frac{y}{2t}+\frac{t}{2},\ \ 2ty^2-2ay-2at^2+3a^2t=0\ \cdots\cdots\text{④}$$

④が重解をもつことより，$D/4=a^2-2t(-2at^2+3a^2t)=0$ となり，$a\neq 0$ から，

$$a-2t(-2t^2+3at)=0,\ \ 4t^3-6at^2+a=0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

すると，①②にともに接する接線が 3 本存在する条件は，⑤が $t\neq 0$ の異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

すると，$f(0)=a\neq 0$ より，求める条件は，$f(0)f(a)<0$ であり，

$$a(4a^3-6a^3+a)<0,\ \ a^2(2a^2-1)>0$$

よって，求める条件は，$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$ である。

［解 説］

共通接線についての頻出題です。計算は穏やかです。

$\boxed{2}$　［東京大・文］

$a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線 $C: y=x^3-3ax^2+b$ が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1 : C は x 軸に接する。

条件 2 : x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

2　　　　［東京大・文］

曲線$C: y = x^3 - 3ax^2 + b\ (a > 0,\ b > 0)$ ……①に対して,

$$y' = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-4a^3 + b$	$\nearrow$

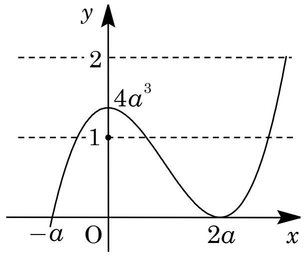
すると, y の増減は右表のようになり, $b > 0$ に注意すると, 条件 1 から,

$$-4a^3 + b = 0,\ b = 4a^3 \text{ ………②}$$

①②から, $C: y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ ……③となり,

$$y = (x + a)(x - 2a)^2$$

これより, C の概形は右図のようになる。



ここで, x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）を R とおくと, R の範囲は $0 < y < 4a^3$ である。

さて, 条件 2 から, R に格子点が含まれるためには $1 < 4a^3$, しかも 1 個だけということから $4a^3 \leqq 2$ が必要になる。まとめると, $1 < 4a^3 \leqq 2$ であることが必要となり,

$$\frac{1}{4} < a^3 \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ ………④}$$

このとき, R には格子点$(0,\ 1)$が含まれ, $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から, ④が成り立つとき $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり, これより領域 R の範囲は,

$$-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < -a < x < 2a < \sqrt{3} < 2$$

そこで, ④のもとで, R に含まれる格子点が$(0,\ 1)$だけかどうかを判断するために, 以下, 直線$x = 1$上の格子点$(1,\ 1)$と R の関係を調べてみる。

ここで, ③の右辺を$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ とおくと,

$$f(1) - 1 = (1 - 3a + 4a^3) - 1 = 4a^3 - 3a = a(2a + \sqrt{3})(2a - \sqrt{3}) < 0$$

よって, $f(1) < 1$から格子点$(1,\ 1)$はRに含まれない。

以上より, 求める条件は④となり, a の範囲は$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ である。

［解　説］

3 次曲線を題材とし, 格子点を絡ませた問題です。必要条件④を求めた後の解法はいろいろ考えられますが, ここでは R の範囲から$x = 1$上の格子点に絞って調べ, 十分性を確認しています。記述しにくい問題です。

3 ［岡山大・文］

s を実数とする。等式

$$f(x)=\left|x^2-x\right|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\{f(t)-|t|\}dt$$

を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。

(3) s が(2)で求めた範囲にあるとする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。

(4) (3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。

3　　［岡山大・文］

(1)　等式 $f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\{f(t)-|t|\}dt$ に対して，$C=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{f(t)-|t|\}dt$ とおくと，$f(x)=|x^2-x|-s-Cx$ となり，

$$C=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{|t^2-t|-s-Ct-|t|\}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(|t^2-t|-|t|)dt-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(s+Ct)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(t^2-t+t)dt+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-t^2+t-t)dt-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}s\,dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t^2dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^2dt-2s\cdot\frac{1}{2}=-s$$

よって，$f(x)=|x^2-x|-s+sx$ である。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，$f(x)=0$ の実数解の個数が対応し，

$$|x^2-x|-s+sx=0,\ s(x-1)=-|x(x-1)|\cdots\cdots\text{①}$$

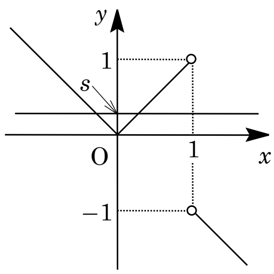
まず，$x=1$ は①の解であり，$x\neq1$ のときについて，①から，

$$s=-\frac{|x(x-1)|}{x-1}\cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$g(x)=-\dfrac{|x(x-1)|}{x-1}\ (x\neq1)$ とおくと，

(i)　$x(x-1)\geqq0\ (x\leqq0,\ 1<x)$ のとき　$g(x)=-\dfrac{x(x-1)}{x-1}=-x$

(ii)　$x(x-1)<0\ (0<x<1)$ のとき　$g(x)=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$



これより，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

すると，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が 3 点で交わる，すなわち①が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，②が $x\neq1$ の異なる 2 個の実数解をもつ条件に対応するので，右図より，

$$0<s<1$$

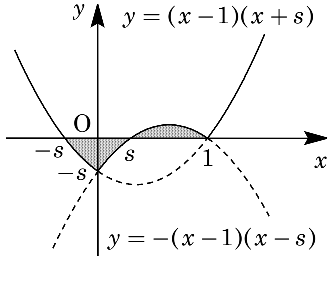
(3)　$0<s<1$ のとき，$f(x)=|x^2-x|-s+sx$ に対して，

(i)　$x^2-x\geqq0\ (x\leqq0,\ 1\leqq x)$ のとき

$$f(x)=x^2-x-s+sx=(x-1)(x+s)$$

(ii)　$x^2-x<0\ (0<x<1)$ のとき

$$f(x)=-x^2+x-s+sx=-(x-1)(x-s)$$



すると，$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部のようになり，このグラフと x 軸で囲まれる部分の面積を $A(s)$ とすると，

$$A(s)=\int_{-s}^{1}-(x-1)(x+s)\,dx+2\int_{s}^{1}-(x-1)(x-s)\,dx$$
$$-\int_{0}^{1}\{-(x-1)(x-s)-(x-1)(x+s)\}\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+s)^3-2\left(-\frac{1}{6}\right)(1-s)^3+\int_{0}^{1}2x(x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(1+s)^3+\frac{1}{3}(1-s)^3+2\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3=-\frac{1}{6}s^3+\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}s+\frac{1}{6}$$

(4) (3)から，$A'(s)=-\frac{1}{2}s^2+3s-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(s^2-6s+1)$

すると，$0<s<1$における$A'(s)=0$の解は$s=3-2\sqrt{2}$から，$A(s)$の増減は右表のようになる。これより，$s=3-2\sqrt{2}$のとき，$A(s)$は最小値をとる。

s	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$A'(s)$		$-$	0	$+$	
$A(s)$		↘		↗	

［解 説］

置換え型の積分方程式を端緒にした微積分の総合問題です。量的には多めです。(2)では，常套手段の定数分離をしても，ややこしい関数が現れなかったので，そのまま進めました。また，(3)では計算ミスを避けるために，公式処理をしています。

$\boxed{4}$ ［東北大］

a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ ［東北大］

(1) 円 $C : x^2-2ax+y^2-4y+4=0\ (a\neq 0)$ ……①に対し，$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$ と変形すると，円 C は，中心 $(a,\ 2)$ で半径 $|a|$ である。

また，直線 $L:-4x+3y+a=0$ ……②，直線 $M:3x+4y-7a=0$ ……③に対し，L と M の交点は，②③を連立して，$25y-25a=0$ から，

$$y=a,\ x=\frac{1}{4}(3a+a)=a$$

すると，交点 $(a,\ a)$ が C 上にある条件は，$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2$ より，

$$-4a+4=0,\ a=1$$

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$ から，

$$|-3a+6|<5|a|,\ 9(a-2)^2<25a^2,\ 4a^2+9a-9>0$$

すると，$(4a-3)(a+3)>0$ より，$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ である。

(3) まず，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}$ の要素の個数は，(2)から，

$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ のとき 2 個，$a=-3,\ \dfrac{3}{4}$ のとき 1 個，$-3<a<\dfrac{3}{4}$ のとき 0 個

また，C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$ から，

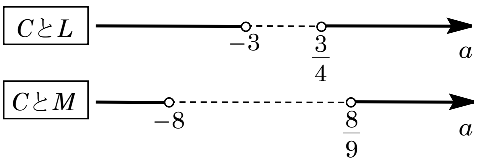
$$|-4a+8|<5|a|,\ 16(a-2)^2<25a^2,\ 9a^2+64a-64>0$$

すると，$(9a-8)(a+8)>0$ より，$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ である。

これより，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数は，

$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ のとき 2 個，$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき 1 個，$-8<a<\dfrac{8}{9}$ のとき 0 個

以上より，C と L の共有点の個数，C と M の共有点の個数について，数直線を用いてまとめると右図のようになる。ただし，実線部の範囲は 2 個，白丸の値は 1 個，破線部の範囲は 0 個を意味する。



右上図より，C と L の共有点と C と M の共有点が，合わせて 3 個になるのは，$a=-8$ または $a=\dfrac{8}{9}$ のときである。

また，$a=1$ のときは，C と L の共有点と C と M の共有点は 2 個ずつであるが，(1)から，このうちの 1 つは重なるため，この場合も合わせて 3 個になる。

よって，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となる a の値は，$a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1$ である。

［解 説］

円と直線についての問題です。(1)の誘導のおかげで，(3)の設問についてのケアレスミスは減少すると思われます。

$\boxed{5}$ ［東京大・文］

O を原点とする座標平面において，放物線 $y=x^2-2x+4$ のうち $x\geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線 $l: y=ax$ を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

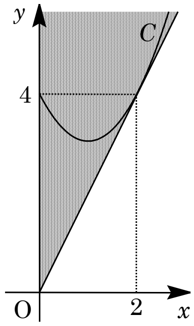
(1)　放物線$C: y = x^2 - 2x + 4\ (x \geqq 0)$ ……①上の点$\mathrm{P}(p,\ p^2 - 2p + 4)$における接線の方程式は，$y' = 2x - 2$より，

$$y - (p^2 - 2p + 4) = (2p - 2)(x - p)$$

$$y = (2p - 2)x - p^2 + 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

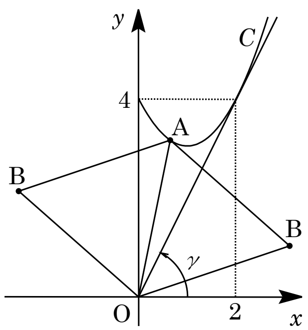
②が原点 O を通るときは，$-p^2 + 4 = 0$かつ$p \geqq 0$より$p = 2$となり，このとき接線は$y = 2x$である。

すると，点 P が C 上を動くとき半直線 OP が通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　C上の点A，直線$l: y = ax$上の点Bに対して，半直線OA, OBとx軸の正の向きとのなす角をそれぞれα，βとする。また，直線$y = 2x$と x 軸の正の向きとのなす角をγとすると，$\tan\gamma = 2 > \sqrt{3}$から$\dfrac{\pi}{3} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$となり，

また(1)から$\gamma \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$……③である。



さて，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるとき，

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ④,\quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③④より$\gamma + \dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$となり，

$$\tan\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \leqq \tan\beta \leqq \tan\frac{5}{6}\pi \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，③⑤より$\gamma - \dfrac{\pi}{3} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{6}$となり，

$$\tan\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \leqq \tan\beta \leqq \tan\frac{\pi}{6} \cdots\cdots\cdots ⑦$$

ここで，加法定理を利用すると，

$$\tan\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} = -\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11},\quad \tan\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11}$$

すると，$\tan\beta = a$から，条件を満たすaの範囲は，⑥⑦より，

$$-\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

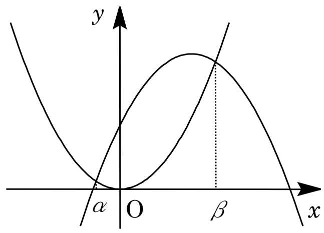
［解　説］

(1)は通過領域の図示，(2)は(1)の結果とゆるく関係している図形問題の組合せです。なお，(1)では，半直線の始点が固定されていることから，直感的に解いています。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。

6　　　　［京都大・文］



2 次関数を $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ ……①のグラフが $y=x^2$ ……②のグラフと 2 点で直交するとき，その 2 交点を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。①②を連立して，

$$(a-1)x^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

異なる 2 実数解をもつことより，

$$a\neq 1\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ D=b^2-4c(a-1)>0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

このとき，③から，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a-1}$ ……⑥，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a-1}$ ……⑦が成り立つ。

また，①より $y'=2ax+b$，②より $y'=2x$ となり，2 交点で接線が直交するので，

$$2\alpha(2a\alpha+b)=-1\ \cdots\cdots\cdots⑧,\ \ 2\beta(2a\beta+b)=-1\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧－⑨より，$4a(\alpha^2-\beta^2)+2b(\alpha-\beta)=0$ となり，$\alpha<\beta$ から $2a(\alpha+\beta)+b=0$

⑥を代入して $-\dfrac{2ab}{a-1}+b=0$ となり，$-ab-b=0$ から $b(a+1)=0$ ………⑩

⑧＋⑨より，$4a(\alpha^2+\beta^2)+2b(\alpha+\beta)=-2$ となり，⑥⑦を代入して，

$$2a\left\{\left(-\frac{b}{a-1}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a-1}\right\}+b\left(-\frac{b}{a-1}\right)=-1$$

$$\frac{2ab^2}{(a-1)^2}-\frac{4ac+b^2}{a-1}=-1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，⑩より $b=0$ または $a=-1$ となり，

(i)　$b=0$ のとき　⑪から $-\dfrac{4ac}{a-1}=-1$ となり，$4ac=a-1$ から $c=\dfrac{a-1}{4a}$

このとき，⑤から $\dfrac{-4(a-1)^2}{4a}>0$ となり，$\dfrac{(a-1)^2}{a}<0$ なので $a<0$ であり，これは④を満たしている。

(ii)　$a=-1$ のとき　⑪から $-\dfrac{2b^2}{4}+\dfrac{-4c+b^2}{2}=-1$ となり，$-4c=-2$ から $c=\dfrac{1}{2}$

このとき，④は満たし，⑤は $b^2-2\cdot(-2)>0$ となり成立している。

(i)(ii)より，求める 2 次関数は，

$$y=ax^2+\frac{a-1}{4a}\ (a<0),\ \ y=-x^2+bx+\frac{1}{2}$$

［解　説］

放物線を題材に，シンプルな条件設定で興味深い結論を導き出すという京大らしい問題です。数式的な処理としては，④⑤のもとで⑥～⑨をまとめ，係数 a，b，c の条件を求めるというものです。

7 ［千葉大・理］

四面体 ABCD において，$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$，$\angle ADB=90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle BDC$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{AB^2+CD^2}}{DG}$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ ［千葉大・理］

(1) 四面体 ABCD において，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

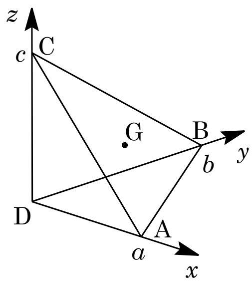
条件より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ なので，$(*)$から，

$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$$

すると，$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2$，$\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2$ となり，

$$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ,\ \angle\mathrm{ADC}=90^\circ$$

(2) $\mathrm{DA}=a$，$\mathrm{DB}=b$，$\mathrm{DC}=c$ とすると，(1)から，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 0)$ として，$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ とおくことができる。すると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心は $\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$ となり，



$$\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}=\sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$$

$$\mathrm{DG}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

よって，$\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}=3$ である。

［解 説］

図形の計量の問題です。ポイントは三平方の定理$(*)$だけで，これによって，座標系の設定という方針が，自然に湧き出てくると思われます。

$\boxed{8}$　　［東京大・理］

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。

8　　　　［東京大・理］

面積が 1 である△ABC に対し，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とおき，平面上の点 X から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の長さを，それぞれ h_1，h_2，h_3 とすると，

$$\triangle ABX=\frac{1}{2}ch_3,\ \triangle BCX=\frac{1}{2}ah_1,\ \triangle CAX=\frac{1}{2}bh_2$$

さて，条件より，$2\leqq\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$ ……①なので，

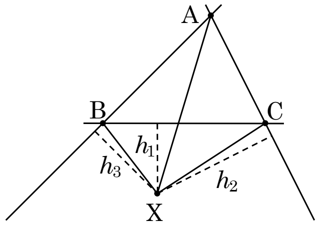
$$2\leqq\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}bh_2\leqq 3,\ 4\leqq ah_1+bh_2+ch_3\leqq 6\ \cdots\cdots\text{②}$$

まず，点 X が△ABC の内部または辺上にあるときは，

$$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=\triangle ABC=1$$

これより，①は成立しないので，点 X は△ABC の外部にある。

そこで，△ABC の外部を，直線 AB, BC, CA を境界線として 6 つの領域に分ける。

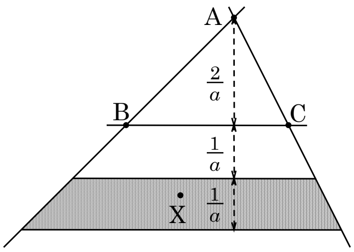


まず，点 X が直線 BC について A と反対側，直線 CA について B と同じ側，直線 AB について C と同じ側にあるときを考えると，$\triangle ABX+\triangle CAX-\triangle BCX=\triangle ABC$ より，

$$\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}bh_2-\frac{1}{2}ah_1=1$$

$$ch_3+bh_2=2+ah_1$$

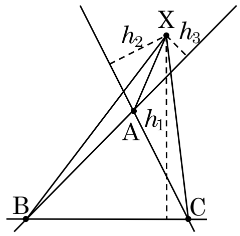
②より，$4\leqq 2+2ah_1\leqq 6$ となり，$\dfrac{1}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{2}{a}$ ………③



一方，A から直線 BC に下ろした垂線の長さを h とおくと，$\triangle ABC=1$ から $\dfrac{1}{2}ah=1$ となり，$h=\dfrac{2}{a}$ ………④

これより，点 X の存在範囲は，③④から右図の網点部となり，この領域の面積は，

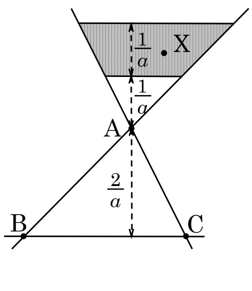
$$\left\{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\times\triangle ABC=\frac{7}{4}\ \cdots\cdots\text{⑤}$$



次に，点 X が直線 BC について A と同じ側，直線 CA について B と反対側，直線 AB について C と反対側にあるときを考えると，$\triangle BCX-\triangle ABX-\triangle CAX=\triangle ABC$ より，

$$\frac{1}{2}ah_1-\frac{1}{2}ch_3-\frac{1}{2}bh_2=1,\ ch_3+bh_2=ah_1-2$$

②から $4\leqq 2ah_1-2\leqq 6$ となり，$\dfrac{3}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{4}{a}$ ………⑥



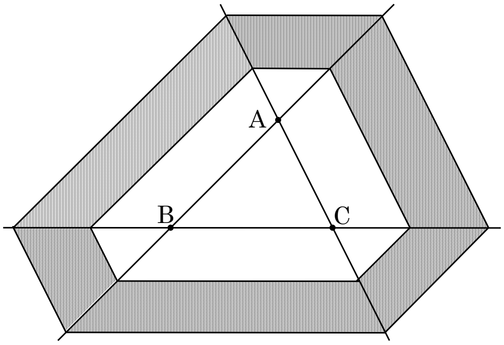
これより，点 X の存在範囲は，④⑥から右図の網点部となり，この領域の面積は，

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\triangle ABC=\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

そして，△ABC の外部の他の 4 つの領域についても同様なので，点 X の動きうる範囲は右図の網点部となる。

したがって，この X の動きうる範囲の面積は，⑤⑦より，

$$\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 3=\frac{15}{2}$$



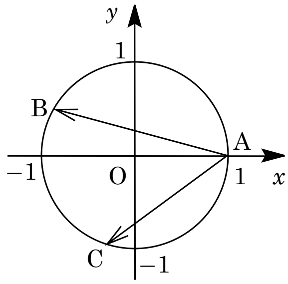
［解 説］

平面図形の問題で，誘導のないタイプです。ただ，時間を気にしないときにはおもしろい内容ですが，限られた時間では厳しいものがあります。

$\boxed{9}$ ［一橋大］

半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ。

9 ［一橋大］



半径 1 の円周上の 3 点 A, B, C に対して，明らかに $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は正，最小値は負なので，$A\neq B$，$A\neq C$ のときを考える。

さて，$A(1,\ 0)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおき，$0<\theta<2\pi$，$\pi\leqq\varphi<2\pi$ としても一般性を失わない。

$\overrightarrow{AB}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{AC}=(\cos\varphi-1,\ \sin\varphi)$ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\cos\theta-1)(\cos\varphi-1)+\sin\theta\sin\varphi\\&=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi-\cos\theta-\cos\varphi+1\\&=\cos(\varphi-\theta)-\cos\varphi-\cos\theta+1=-2\sin\frac{2\varphi-\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)-\cos\theta+1\\&=2\sin\frac{2\varphi-\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}-\cos\theta+1\end{aligned}$$

ここで，θ を $0<\theta<2\pi$ で固定し，$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ に注意すると，$0<\dfrac{2\varphi-\theta}{2}<2\pi$ から，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は $\dfrac{2\varphi-\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\dfrac{\theta+\pi}{2}\right)$ のとき最大値 $M=2\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\theta+1$ ……①，そして $\dfrac{2\varphi-\theta}{2}=\dfrac{3}{2}\pi\left(\varphi=\dfrac{\theta+3\pi}{2}\right)$ のとき最小値 $m=-2\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\theta+1$ ……②をとる。

そこで，θ を $0<\theta<2\pi$ で動かすと，①②より，

$$M=2\sin\frac{\theta}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+1=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}=2\left(\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$m=-2\sin\frac{\theta}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+1=2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}=2\left(\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

したがって，$0<\sin\dfrac{\theta}{2}\leqq 1$ から，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は，$\sin\dfrac{\theta}{2}=1$ のとき 4 となり，このとき $(\theta,\ \varphi)=(\pi,\ \pi)$ である。また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最小値は，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき $-\dfrac{1}{2}$ となり，このとき $(\theta,\ \varphi)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$ である。

［解 説］

内積を題材とした最大・最小問題です。最大値については，図形的にほぼ明らかです。ただ，最小値も問われているので，成分表示をして 1 文字固定の方法を利用して解いています。

10　　[北海道大・理]

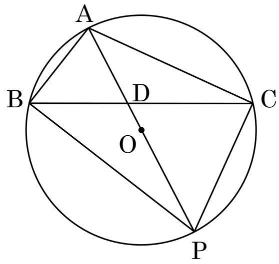
三角形 ABC について，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{6}$ が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。

(3)　直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］



(1)　$|\overrightarrow{AB}|=1$ ……①，$|\overrightarrow{AC}|=2$ ……②，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ である

△ABCに余弦定理を適用すると，

$$6=1+4-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\,,\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　△ABC の外接円の中心 O，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P として，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおく。

線分 AP は外接円の直径から，$\angle ABP=\angle ACP=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ なので，④から，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left((s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)=0$$

①③を適用すると，$(s-1)\cdot1^2+t\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ となり，$2s-t=2$ ………⑥

また，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}$ なので，⑤から，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left(s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}\right)=0$$

②③を適用すると，$s\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(t-1)\cdot2^2=0$ となり，$-s+8t=8$ ………⑦

⑥⑦より，$15s=24$ から $s=\dfrac{8}{5}$ となり，$t=2\cdot\dfrac{8}{5}-2=\dfrac{6}{5}$ である。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ となり，直線 AP と直線 BC の交点を D とすると，

$$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=\frac{8}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}k\overrightarrow{AC}\quad(k\text{ は定数})$$

すると，$\dfrac{8}{5}k+\dfrac{6}{5}k=1$ から $k=\dfrac{5}{14}$ となるので，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ より，

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{16}{49}\cdot1^2+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{49}\cdot2^2=\frac{40}{49}$$

よって，$AD=\sqrt{\dfrac{40}{49}}=\dfrac{2}{7}\sqrt{10}$ となる。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)では，AO＝BO＝CO として解くことも可能ですが，計算量を考えて，上記のように円周角に注目しました。

11　　　　［九州大・理］

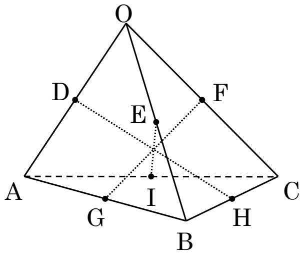
四面体 OABC において, 辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を l, 辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m, 辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$l\perp m$, $m\perp n$, $n\perp l$ であり, $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$, $\mathrm{CA}=2$ のとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　直線 OB と直線 CA のなす角 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

11 ［九州大・理］

(1) 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，辺 OA, OB, OC, AB, BC, CA の中点を，それぞれ D, E, F, G, H, I とすると，



$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$$

そして，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EI}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ は，それぞれ直線 l, m, n の方向ベクトルである。

さて，$l\perp m$ より $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EI}}=0$ なので，$(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=0$ から，

$$|\vec{c}|^2-|-\vec{a}+\vec{b}|^2=0,\ |\vec{c}|=|-\vec{a}+\vec{b}|$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ より，$\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\sqrt{5}$ ………①

同様に，$m\perp n$ より $\overrightarrow{\mathrm{EI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}}=0$，$n\perp l$ より $\overrightarrow{\mathrm{FG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}}=0$ なので，

$$(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=0,\ (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

よって，$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ ……②，$\mathrm{OB}=\mathrm{CA}=2$ ……③となる。

そこで，△OAB と△OBC に余弦定理を適用すると，

$$5=3+4-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ 3=4+5-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

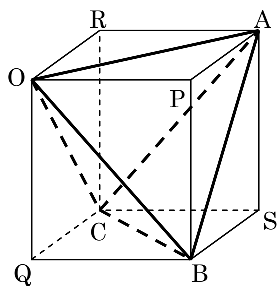
これより，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=1-3=-2$

そして，直線 OB と直線 CA のなす角を $\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}=\frac{|-2|}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

よって，$\theta=\frac{\pi}{3}$ となる。

(2) ①②③より，四面体 OABC は 4 つの面が合同な三角形であるので，右図のように直方体 OPAR-QBSC に埋め込むことができる。



ここで，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$\mathrm{OR}=r$ とおくと，

$$p^2+q^2=\mathrm{OB}^2=4\ \text{………④}$$

$$q^2+r^2=\mathrm{OC}^2=5\ \text{………⑤}$$

$$r^2+p^2=\mathrm{OA}^2=3\ \text{………⑥}$$

⑤⑥より $q^2-p^2=2$ となり，④と合わせて $p^2=1$，$q^2=3$，$r^2=2$

すると，四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の中心を K とすると，K は直方体 OPAR-QBSC の中心に一致するので，球の半径 KO は，

$$\mathrm{KO}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+3+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

［解 説］

四面体を題材にした空間図形の問題です。ただ，(1)のプロセスから，この四面体が等面四面体であることがわかりますので，その知識を利用して(2)は解いています。

$\boxed{12}$　　［京都大］

k を正の実数とする。座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき, k の値を求めよ。ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。

12 ［京都大］

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，4 点 A, B, C, D が原点 O を中心とする半径 1 の球面上にあるので,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，与えられた条件から,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}\cdots\cdots②,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{\sqrt{6}}{4}\cdots\cdots③,\ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=k\cdots\cdots④$$

ここで，①②より $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となり，①③より $-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{\sqrt{6}}{4}<-\frac{1}{2}$ に注意すると $120^\circ<\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}<135^\circ$ である。

これより，4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので，$\vec{d}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて,

$$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\quad(p,\ q,\ r\text{ は定数})\cdots\cdots\cdots⑤$$

①⑤より，$|p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}|=1$ なので，①②③を利用すると,

$$p^2+q^2+r^2+pq-\frac{\sqrt{6}}{2}qr-\frac{\sqrt{6}}{2}pr=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

②⑤より，$\vec{c}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\frac{1}{2}$ なので，①③を利用すると,

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{4}q+r=\frac{1}{2},\ -\sqrt{6}p-\sqrt{6}q+4r=2\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑤より，$\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})$ なので，①②③を利用すると,

$$p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=\frac{1}{2}p+q-\frac{\sqrt{6}}{4}r,\ p=q\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $-2\sqrt{6}p+4r=2$ となり，$r=\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑨$

⑥⑧より $3p^2+r^2-\sqrt{6}pr=1$ となり，⑨を代入すると,

$$3p^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{6}p\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=1$$

まとめると，$\frac{3}{2}p^2+\frac{1}{4}=1$ となり，$p^2=\frac{1}{2}$ から $p=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots⑩$

さて，④⑧⑨より，$k=p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=p+\frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{8}$

ここで，$k>0$ なので⑩より $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$k=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの誘導のない問題です。方針について，成分表示か 1 次結合か迷いましたが，ここでは後者で処理をしました。

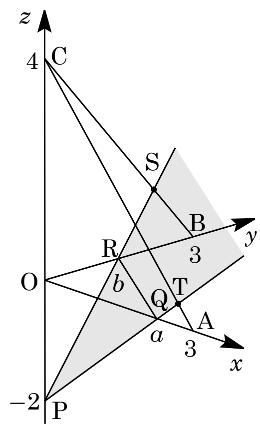
$\boxed{13}$ ［東京工大］

座標空間に 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$ をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標, および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面に図示せよ。

13　　　　［東京工大］



(1)　$0<a<3$，$0<b<3$ のとき，座標空間の点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$，$\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を通る平面 H は，$p+q+r=1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=p(0,\ 0,\ -2)+q(a,\ 0,\ 0)+r(0,\ b,\ 0)$$
$$=(aq,\ br,\ -2p)\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$ に対して，線分 AC は，$0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3,\ 0,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+t(3,\ 0,\ -4)$$
$$=(3t,\ 0,\ 4-4t)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，線分 BC は，$0\leqq s\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ 3,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+s(0,\ 3,\ -4)=(0,\ 3s,\ 4-4s)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，平面 H と線分 AC の交点を T とすると，①②から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(3t,\ 0,\ 4-4t)$$

$p=-2+2t$，$q=\dfrac{3}{a}t$，$r=0$ から，$-2+2t+\dfrac{3}{a}t=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{a}\right)t=3$

これより $t=\dfrac{3a}{2a+3}$ となり，T の座標は $\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{-4a+12}{2a+3}\right)$ である。

同様に，平面 H と線分 BC の交点を S とすると，①③から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(0,\ 3s,\ 4-4s)$$

$p=-2+2s$，$q=0$，$r=\dfrac{3}{b}s$ から，$-2+2s+\dfrac{3}{b}s=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{b}\right)s=3$

これより $s=\dfrac{3b}{2b+3}$ となり，S の座標は $\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{-4b+12}{2b+3}\right)$ である。

(2)　点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は，方べきの定理およびその逆から，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}\cdots\cdots④$である。

ここで，$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PR}=\sqrt{b^2+4}$ であり，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{9a}{2a+3}\cdot\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{9}{2a+3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}}=\frac{9b}{2b+3}\cdot\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{9}{2b+3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

よって，$\mathrm{PT}=\dfrac{9}{2a+3}\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PS}=\dfrac{9}{2b+3}\sqrt{b^2+4}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{9}{2a+3}(a^2+4)=\frac{9}{2b+3}(b^2+4),\quad (a^2+4)(2b+3)=(b^2+4)(2a+3)$$

展開すると，$2a^2b+3a^2+8b=2ab^2+3b^2+8a$ となり，

$$2ab(a-b)+3(a+b)(a-b)-8(a-b)=0,\quad (a-b)(2ab+3a+3b-8)=0$$

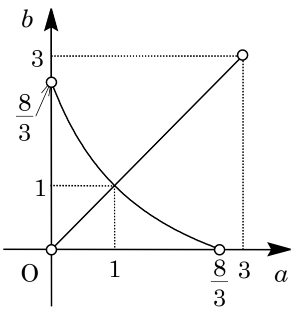
すると，求める条件は，$0<a<3$，$0<b<3$ のもとで，

$$a=b\cdots\cdots⑤\quad または\quad 2ab+3a+3b-8=0\cdots\cdots⑥$$

このとき，⑥から，$(2a+3)b=-3a+8$ となり，

$$b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{25}{2(2a+3)}$$

そして，⑤から $b=a$ と合わせて点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の実線部になる。ただし，端点の白丸は含まない。



［解 説］

空間図形を題材としたベクトルの問題に，4 点が同一円周上にある条件を絡めたものです。(2)では，計算だけで押し通すのは困難と予測し，次の手として，方べきの定理に気付くという点がポイントになっています。要演習の 1 題です。

$\boxed{14}$ ［名古屋大・文］

(1)　平面上に$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$をみたす相異なる 4 点 O, P, Q, R がある。このとき$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=0$ならば，三角形 PQR は正三角形であることを示せ。

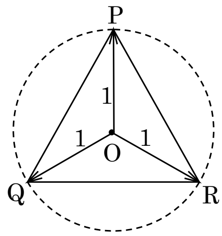
(2)　空間内に$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$をみたす相異なる 5 点 O, A, B, C, D がある。また O から A, B, C を含む平面におろした垂線の足を H とする。このとき，以下の 2 つの命題を示せ。

命題(i)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ならば，三角形 ABC は正三角形である。

命題(ii)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=0$かつ$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{3}$ならば，四面体 ABCD は正四面体である。

14　　［名古屋大・文］

(1)　平面上の相異なる 4 点 O, P, Q, R に対して,



$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OR}|=1,\ |\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}|=0$$

すると，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ より，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OR}$

$$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|-\overrightarrow{OR}|$$

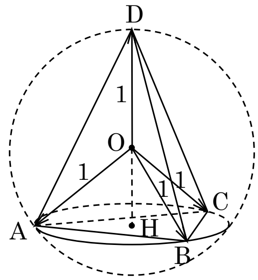
両辺を 2 乗して，$1^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+1^2=1^2$ から $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$

となり，△OPQ に余弦定理を適用すると，

$$PQ^2=1^2+1^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=3,\ PQ=\sqrt{3}$$

同様にして，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}$ から $QR=RP=\sqrt{3}$ となるので，△PQR は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形である。

(2)　空間内の相異なる 5 点 O, A, B, C, D に対して,



$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1\cdots\cdots\cdots①$$

O から A, B, C を含む平面におろした垂線の足を H とする。

［命題(i)の証明］

$|\overrightarrow{OH}|=h$ とおくと，OH は平面 ABC に垂直より，①から，

$$|\overrightarrow{HA}|=|\overrightarrow{HB}|=|\overrightarrow{HC}|=\sqrt{1-h^2}\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}$ より，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})+3\overrightarrow{OH}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，条件より $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=3|\overrightarrow{OH}|$ なので，両辺を 2 乗して，③から，

$$|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|^2+6(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{OH}+9|\overrightarrow{OH}|^2=9|\overrightarrow{OH}|^2$$

これより，$|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|=0$ となり，$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots④$

さらに，$\overrightarrow{HA'}=\dfrac{\overrightarrow{HA}}{\sqrt{1-h^2}}$，$\overrightarrow{HB'}=\dfrac{\overrightarrow{HB}}{\sqrt{1-h^2}}$，$\overrightarrow{HC'}=\dfrac{\overrightarrow{HC}}{\sqrt{1-h^2}}$ とおくと，②④より，

$$|\overrightarrow{HA'}|=|\overrightarrow{HB'}|=|\overrightarrow{HC'}|=1,\ \overrightarrow{HA'}+\overrightarrow{HB'}+\overrightarrow{HC'}=\vec{0}$$

すると，(1)の結果から，△A′B′C′ は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形である。

そして，△ABC は△A′B′C′ と相似となり，相似比が $\sqrt{1-h^2}:1$ となる。よって，△ABC は 1 辺の長さが $\sqrt{3(1-h^2)}$ の正三角形である。

［命題(ii)の証明］

まず，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|=0$ より，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ となり，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}\cdots\cdots\cdots⑤$$

これより，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|-\overrightarrow{OD}|=1$ となり，条件から $|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{3}$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

したがって，命題(i)から，三角形 ABC は 1 辺の長さが $\sqrt{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$ の正三角形である。

次に，③④から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となり，⑤から $-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

すると，3 点 O, D, H は一直線上にあり，O に関して D と H は反対側なので，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{OD}+\mathrm{OH}=3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

また，②より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{HC}}\right|=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ となり，

$$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

以上より，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 ABCD は正四面体である。

［解　説］

ベクトルの図形への応用問題です。3 つの命題の証明には，いろいろな方法が考えられますが，(1)→(2)(i)→(2)(ii)というつながりを重視した解答例で記しています。

$\boxed{15}$ ［新潟大・理］

m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2) (1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

方程式 $70x+130y=m$ は，x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

$\boxed{15}$ ［新潟大・理］

(1) 方程式$70x+130y=m$ ……①が整数解をもつとき，$70x+130y$ は 10 の倍数であるので，正の整数 m は 10 の倍数になる。

そこで，最小の 10 の倍数 $m=10$ のときを調べると，①から，

$$70x+130y=10,\ 7x+13y=1 \text{ ………②}$$

すると，②を満たす整数解$(x,\ y)=(2,\ -1)$ が存在することより，m の最小値 m_0 は $m_0=10$ となる。

(2) (1)から，$7\times2+13\times(-1)=1$ ……③となり，②③より，

$$7(x-2)+13(y+1)=0,\ 7(x-2)=-13(y+1)$$

7 と 13 は互いに素なので，k を整数として，$(x-2,\ y+1)=(-13k,\ 7k)$ となり，

$$x=-13k+2,\ y=7k-1$$

(3) l を正の整数として，$m=10l$ のとき，①から，

$$70x+130y=10l,\ 7x+13y=l \text{ ………④}$$

④を満たす整数解$(x,\ y)=(2l,\ -l)$ をとると，$7\cdot2l+13\cdot(-l)=l$ から，

$$7(x-2l)+13(y+l)=0,\ 7(x-2l)=-13(y+l)$$

(2)と同様に，k を整数として，$(x-2l,\ y+l)=(-13k,\ 7k)$ となり，

$$x=-13k+2l,\ y=7k-l \text{ ………⑤}$$

ここで，$x\geqq1$，$y\geqq1$ なので，⑤から $-13k+2l\geqq1$ かつ $7k-l\geqq1$ となり，

$$\frac{l+1}{7}\leqq k\leqq\frac{2l-1}{13} \text{ ………⑥}$$

さらに，⑤を満たす$(x,\ y)$ が 3 組存在，すなわち⑥を満たす k が 3 個存在するためには，$\dfrac{2l-1}{13}-\dfrac{l+1}{7}\geqq2$ であることが必要であり，

$$7(2l-1)-13(l+1)\geqq182,\ l\geqq182+7+13=202$$

そこで，$l=202$ のときを調べると，⑥は $29\leqq k\leqq31$ となり，整数 k は 29, 30, 31 と 3 個存在する。

したがって，条件を満たす l の最小値は 202 となり，求める m の最小値は，

$$m=10\times202=2020$$

［解 説］

不定方程式の問題です。(1)と(2)は定番ですが，(3)は(2)をベースとしたひねりが加えられています。

16 ［一橋大］

以下の問いに答えよ。

(1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ。

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数を求めよ。

$\boxed{16}$ ［一橋大］

(1) 以下，$\bmod 2020$ で記述すると，$2\times10^3\equiv-20$ より，

$$10^4\equiv5\times(-20)\equiv-10^2,\ 10^8\equiv(-10^2)\times(-10^2)\equiv10^4\equiv-10^2$$

$$10^{10}\equiv10^2\times(-10^2)\equiv-10^4\equiv10^2$$

よって，10^{10} を 2020 で割った余りは $10^2=100$ である。

(2) まず，自然数 n に対して，$10^{4n}\equiv-10^2$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき (1)より，$10^4\equiv-10^2$ より成立している。

(ii) $n=k$ のとき $10^{4k}\equiv-10^2$ と仮定すると，

$$10^{4(k+1)}\equiv-10^2\times10^4\equiv-10^2\times(-10^2)\equiv10^4\equiv-10^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$10^{4n}\equiv-10^2$ である。

これより，自然数 n に対して，$10^{4n+1}\equiv-10^2\times10\equiv-10^3$

$$10^{4n+2}\equiv-10^3\times10\equiv-10^4\equiv10^2,\ 10^{4n+3}\equiv10^2\times10\equiv10^3$$

なお，$-10^2\equiv1920$，$-10^3\equiv1020$ なので，余りはすべて異なる。

また，$n=0$ に対しては，$10^0\equiv1$，$10^1\equiv10$，$10^2\equiv10^2$，$10^3\equiv10^3$ である。

さて，100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるものを x とおくと，

(i) $x=2\times10^{99}$ のとき

$99=4\times24+3$ より，$2\times10^{99}\equiv2\times10^3\equiv2000$ となり，2020 で割り切れない。

(ii) $x=10^{99}+10^l$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 98)$ のとき

$x\equiv0$ の条件は，$10^l=x-10^{99}\equiv0-10^3\equiv-10^3$

すなわち，$l=4n+1$ $(n\geqq1)$ のときより，$l=5,\ 9,\ \cdots,\ 97$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 24)$ となり，2020 で割り切れる整数 x は 24 個となる。

(i)(ii)より，求める 2020 で割り切れる整数 x の個数は 24 である。

［解 説］

剰余に注目した整数問題です。(1)のプロセスが(2)の誘導になっています。

17 ［東京工大］

次の問いに答えよ。

(1) $|x^2-x-23|$の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ。

(2) k 個の連続した正の整数 x_1，…，x_k に対して，$|{x_j}^2-x_j-23|$ $(1 \leqq j \leqq k)$ の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，…，x_k をすべて求めよ。ここで，k 個の連続した整数とは，x_1，x_1+1，x_1+2，…，x_1+k-1 となる列のことである。

$\boxed{17}$ ［東京工大］

(1) 以下 mod 3 で記述すると，条件より正の整数 x に対し，$|x^2-x-23|\equiv 2$ ………①

まず，$a=x^2-x-23=x(x-1)-23$ とおくと，$x=5$ のとき $a=5\times 4-23=-3$，$x=6$ のとき $a=6\times 5-23=7$ となり，x に対し a は単調増加するので，$1\leqq x\leqq 5$ のとき $a<0$，$x\geqq 6$ のとき $a>0$ であることがわかる。

(i) $1\leqq x\leqq 5$ のとき ①は，$-x^2+x+23\equiv 2$ である。

(a) $x\equiv 0$ のとき $-x^2+x+23\equiv 0+0+23\equiv 23\equiv 2$ となり，①を満たす。

(b) $x\equiv 1$ のとき $-x^2+x+23\equiv -1+1+23\equiv 23\equiv 2$ となり，①を満たす。

(c) $x\equiv 2$ のとき $-x^2+x+23\equiv -4+2+23\equiv 21\equiv 0$ となり，①を満たさない。

(ii) $x\geqq 6$ のとき ①は，$x^2-x-23\equiv 2$ である。

(a) $x\equiv 0$ のとき $x^2-x-23\equiv 0-0-23\equiv -23\equiv 1$ となり，①を満たさない。

(b) $x\equiv 1$ のとき $x^2-x-23\equiv 1-1-23\equiv -23\equiv 1$ となり，①を満たさない。

(c) $x\equiv 2$ のとき $x^2-x-23\equiv 4-2-23\equiv -21\equiv 0$ となり，①を満たさない。

(i)(ii)より，①を満たすのは，$x=1,\ 3,\ 4$ である。

(2) 正の整数 x に対して $|x^2-x-23|$ が素数になるのは，$|x^2-x-23|=3$ ……②の場合を除くと，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であることが必要である。

(i) $1\leqq x\leqq 5$ のとき

②より，$-x^2+x+23=3$ から $(x+4)(x-5)=0$ となり，$x=5$ で満たされる。

また，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であるのは，(1)から $x=1,\ 3,\ 4$ のときとなり，連続する $x=3,\ 4$ の場合を調べると，

・$x=3$ のとき $|x^2-x-23|=-9+3+23=17$

・$x=4$ のとき $|x^2-x-23|=-16+4+23=11$

よって，連続する 3 整数 $x=3,\ 4,\ 5$ で，$|x^2-x-23|$ は素数になる。

(ii) $x\geqq 6$ のとき

②より，$x^2-x-23=3$ から $x^2-x-26=0$ となり，正の整数 x は存在しない。

また，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であるのは，(1)から $x\equiv 0,\ 1$ のときとなり，そのうち最小の連続する $x=6,\ 7$ の場合を調べると，

・$x=6$ のとき $|x^2-x-23|=36-6-23=7$

・$x=7$ のとき $|x^2-x-23|=49-7-23=19$

よって，連続する 2 整数 $x=6,\ 7$ で，$|x^2-x-23|$ は素数になる。

そして，$x\geqq 8$ では，(1)から $x\equiv 2$ ($x=8,\ 11,\ 14,\ \cdots$) の場合，$|x^2-x-23|$ は 3 の倍数（3 を除く）となり素数ではない。すなわち，$|x^2-x-23|$ が素数になる連続する正の整数 x の個数は，高々2 個となる。

(i)(ii)より，$\left|x^2-x-23\right|$がすべて素数となる連続する個数が最大な整数xは,

$$x=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

以上より，連続した正の整数x_1，…，x_kに対して，$\left|{x_j}^2-x_j-23\right|$ $(1\leqq j\leqq k)$の値がすべて素数になるkの最大値は$k=5$であり，このとき,

$$x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=5,\ x_4=6,\ x_5=7$$

［解 説］

剰余を題材にし，素数を絡めた整数問題で，(1)が(2)へのストレートな誘導になっています。そして，(2)のポイントは「3 の倍数で素数なのは 3 だけ」ということです。当たり前ですが……。

$\boxed{18}$ ［熊本大・医］

以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

$\boxed{18}$　　［熊本大・医］

(1) 以下，mod5 で記述する。自然数 x に対して，

$x\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$，$x\equiv 1$ のとき $x^2\equiv 1$，$x\equiv 2$ のとき $x^2\equiv 4$

$x\equiv 3$ のとき $x^2\equiv 9\equiv 4$，$x\equiv 4$ のとき $x^2\equiv 16\equiv 1$

これより，x^2 を 5 で割ったときの余りは $0, 1, 4$ のいずれかである。

(2) 自然数 x, y, z に対して，$x^2+5y^2=2z^2$ ……①の成立を仮定する。

まず，$5y^2\equiv 0$ から，(1)の結果を利用すると，$x^2+5y^2\equiv 0,\ 1,\ 4$

また，$z^2\equiv 0,\ 1,\ 4$ から，$z^2\equiv 0$ のとき $2z^2\equiv 0$，$z^2\equiv 1$ のとき $2z^2\equiv 2$，$z^2\equiv 4$ のとき $2z^2\equiv 8\equiv 3$ となる。

すると，①から $x^2+5y^2\equiv 2z^2$ なので，$x^2+5y^2\equiv 0$ かつ $2z^2\equiv 0$，すなわち $x\equiv 0$ かつ $z\equiv 0$ となり，x_1，z_1 を自然数として，$x=5x_1$，$z=5z_1$ と表せる。

①に代入すると，$25{x_1}^2+5y^2=50{z_1}^2$，$5{x_1}^2+y^2=10{z_1}^2$

これより $y^2\equiv 0$，すなわち $y\equiv 0$ となり，y_1 を自然数として $y=5y_1$ と表せる。

すると，①から，$25{x_1}^2+125{y_1}^2=50{z_1}^2$ となり，

$${x_1}^2+5{y_1}^2=2{z_1}^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

同様に考えると，②から，$x_1\equiv 0$，$y_1\equiv 0$，$z_1\equiv 0$ となるので，x_2，y_2，z_2 を自然数として，$x_1=5x_2$，$y_1=5y_2$，$z_1=5z_2$ と表せ，②に代入すると，

$$25{x_2}^2+125{y_2}^2=50{z_2}^2,\ {x_2}^2+5{y_2}^2=2{z_2}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

この①→②→③の操作を同様に繰り返すと，$x>x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$，$y>y_1>y_2>\cdots>y_n>\cdots$，$z>z_1>z_2>\cdots>z_n>\cdots$ となる無限個の自然数の数列が存在することになる。

しかし，ある n で $x_n\leqq 0$ または $y_n\leqq 0$ または $z_n\leqq 0$ となり，成立しない。

したがって，①を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない。

［解　説］

不定方程式の解の存在についての論証問題です。(2)については，単調減少する無限個の自然数は存在しないということです。ときどき遭遇する論法の 1 つです。

19 ［名古屋大・文］

xy 平面において x, y がともに整数となる点$(x,\ y)$を格子点という。正の整数 n に対して，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ で定まる領域を D とする。4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。

(2) $S(n)$ を求めよ。

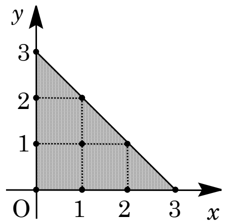
(3) $R(n)$ を求めよ。

(4) $R(n)=1001$ となる n を求めよ。

$\boxed{19}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

(1)　4 つの頂点が，領域 $D: x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ に含まれる格子点であり，しかも x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。

まず，$n=3$ のとき，領域 D は右図の網点部となり，D に含まれる長方形の個数について下側の辺の位置で場合分けすると，



(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき

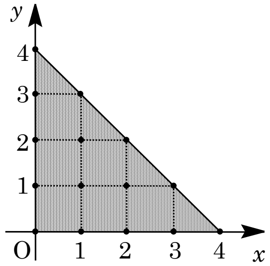
横の長さが 1 のとき $2+1=3$ 個，横の長さが 2 のとき 1 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき

横の長さが 1 のとき 1 個。

(i)(ii)より，$R(3)=(3+1)+1=5$

次に，$n=4$ のとき，領域 D は右図の網点部となり，D に含まれる長方形の個数について，同様に調べると，



(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき

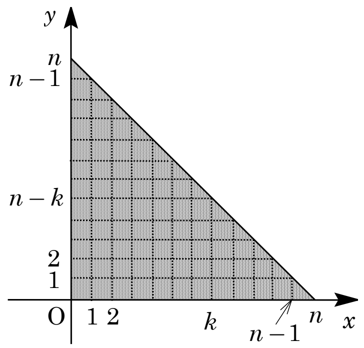
横の長さが 1 のとき $3+2+1=6$ 個，横の長さが 2 のとき $2+1=3$ 個，横の長さが 3 のとき 1 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき

$n=3$ のときに対応し，長方形の数は $R(3)$ 個。

(i)(ii)より，$R(4)=(6+3+1)+R(3)=15$

(2)　領域 D に含まれる長方形ついて，下側の辺が x 軸上にあるときの個数を $S(n)$ とする。



まず，$n \geqq 2$ のとき，整数 k を $1 \leqq k \leqq n-1$ として，横の長さが k の長方形の数 N_k は，

$$N_k = (n-k)+(n-k-1)+\cdots+2+1$$

$$= \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} N_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)$$

ここで，$l=n-k$ とおくと，

$$S(n) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1} l(l+1) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{3}\{l(l+1)(l+2)-(l-1)l(l+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$D: x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n+1$ に含まれる長方形の数 $R(n+1)$ に対して，

(i)　長方形の下側の辺が x 軸上にあるとき　長方形の数は $S(n+1)$ 個。

(ii)　長方形の下側の辺が $y \geqq 1$ 上にあるとき　長方形の数は $R(n)$ 個。

(i)(ii)より，$R(n+1) = S(n+1) + R(n)$ となり，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} R(n) &= R(1) + \sum_{k=1}^{n-1} S(k+1) = 0 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(4)　$R(n) = 1001$ より，$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2) = 7\times11\times13$ となり，

$$(n-1)n(n+1)(n+2) = 7\times11\times13\times24 = 11\times12\times13\times14$$

すると，$R(n)$ は単調に増加するので，$n = 12$ である。

［解　説］

格子点を題材にした問題です。(1)において，$R(3)$ から $R(4)$ を求める際に，漸化式を利用するという方針を立てました。なお，連続自然数の積の和については，階差数列をつくるという方法で計算をしています。

$\boxed{20}$　　　　［神戸大・理］

p を 2 以上の自然数とし，数列$\{x_n\}$は

$$x_1=\frac{1}{2^p+1},\ \ x_{n+1}=\left|2x_n-1\right|\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

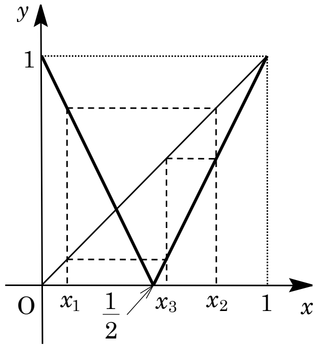
をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$ のとき，x_n を求めよ。

(2)　$x_{p+1}=x_1$ であることを示せ。

$\boxed{20}$　　［神戸大・理］

(1)　自然数 $p \geqq 2$ で，$x_1 = \dfrac{1}{2^p+1}$，$x_{n+1} = \left|2x_n - 1\right|$ と定義される数列 $\{x_n\}$ に対し，$p=3$ のとき $x_1 = \dfrac{1}{2^3+1} = \dfrac{1}{9}$



$$x_2 = \left|2x_1 - 1\right| = \left|\frac{2}{9} - 1\right| = \frac{7}{9}$$

$$x_3 = \left|2x_2 - 1\right| = \left|\frac{14}{9} - 1\right| = \frac{5}{9}$$

$$x_4 = \left|2x_3 - 1\right| = \left|\frac{10}{9} - 1\right| = \frac{1}{9}$$

すると，$x_4 = x_1$ より，数列 $\{x_n\}$ は $\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{7}{9}$，$\dfrac{5}{9}$ を周期 3 で繰り返す周期数列となり，k を 0 以上の整数として，

$$x_n = \frac{1}{9}\ (n = 3k+1),\quad x_n = \frac{7}{9}\ (n = 3k+2),\quad x_n = \frac{5}{9}\ (n = 3k+3)$$

(2)　(1)と同様にして，$p=2$ のときは，$x_1 = \dfrac{1}{5}$，$x_2 = \dfrac{3}{5}$，$x_3 = \dfrac{1}{5} = x_1$

$p=4$ のときは，$x_1 = \dfrac{1}{17}$，$x_2 = \dfrac{15}{17}$，$x_3 = \dfrac{13}{17}$，$x_4 = \dfrac{9}{17}$，$x_5 = \dfrac{1}{17} = x_1$

さて，$0 < \dfrac{1}{2^p+1} \leqq \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$ から，$0 < x_1 \leqq \dfrac{1}{5}$ であり，

$$x_2 = \left|\frac{2}{2^p+1} - 1\right| = \left|\frac{-2^p+1}{2^p+1}\right| = \frac{2^p-1}{2^p+1}$$

すると，$2 \leqq n \leqq p+1$ で，$x_n = \dfrac{2^p - (1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})}{2^p+1} = \dfrac{2^p - 2^{n-1}+1}{2^p+1}$ と推測できるので，以下，この式の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$x_2 = \dfrac{2^p - 2^1 + 1}{2^p+1} = \dfrac{2^p-1}{2^p+1}$ となり，成立している。

(ii)　$n = k\ (2 \leqq k \leqq p)$ のとき　$x_k = \dfrac{2^p - 2^{k-1}+1}{2^p+1}$ と仮定する。

$$x_{k+1} = \left|2x_k - 1\right| = \left|\frac{2^{p+1} - 2^k + 2}{2^p+1} - 1\right| = \left|\frac{2^p - 2^k + 1}{2^p+1}\right| = \frac{2^p - 2^k+1}{2^p+1}$$

これより，$n = k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，$x_n = \dfrac{2^p - 2^{n-1}+1}{2^p+1}\ (2 \leqq n \leqq p+1)$ となり，これから，

$$x_{p+1} = \frac{2^p - 2^{p+1-1}+1}{2^p+1} = \frac{1}{2^p+1} = x_1$$

［解　説］

漸化式と数学的帰納法についての問題です。(2)については，図による予測と具体例の計算をもとに，結論を推測して進めています。

21 ［京都大］

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という。どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

21　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

まず，1 行目 4 個のマス目の入れ方は，1，2，3，4 の数字を 1 列に並べることより，$4! = 24$ 通りの場合がある。

ここで，右図のように，1 行目のマス目に左から(1，2，3，4)の順序に数字が入れてある場合を考える。

1	2	3	4
×	×	×	×
×	×	×	×
×	×	×	×

ここで，どの行も 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあり，しかもどの列にも 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあることを考え，2 行 1 列目に入れてある数字で場合分けをする。

(i) 2 行 1 列目の数字が 2 の場合

このとき，2 行目は次のいずれかとなる。

(2，1，4，3)，(2，3，4，1)，(2，4，1，3)

1	2	3	4
2	1	4	3
×	×	×	×
×	×	×	×

(a)　2 行目の数字の入れ方が(2，1，4，3)のときは，3 行目は，

(3，4，1，2)，(3，4，2，1)，(4，3，1，2)，(4，3，2，1)

また，4 行目は各々1 通りずつである。

1	2	3	4
2	3	4	1
×	×	×	×
×	×	×	×

(b)　2 行目の数字の入れ方が(2，3，4，1)のときは，3 行目は，

(3，4，1，2)，(4，1，2，3)

また，4 行目は各々1 通りずつである。

1	2	3	4
2	4	1	3
×	×	×	×
×	×	×	×

(c)　2 行目の数字の入れ方が(2，4，1，3)のときは，3 行目は，

(3，1，4，2)，(4，3，2，1)

また，4 行目は各々1 通りずつである。

(a)(b)(c)を合わせると，$4+2+2=8$（通り）

(ii)　2 行 1 列目の数字が 3 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

(iii) 2 行 1 列目の数字が 4 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

(i)(ii)(iii)より，求める入れ方は，$24\times(8+8+8)=576$ 通りである。

［解　説］

いろいろな考え方ができる場合の数の問題です。ここでは，対象が大きなマス目でないので，具体的に考えています。なお，解答例の(i)の(b)と(c)については，まとめて記述しても構いません。

$\boxed{22}$ ［信州大・医］

変量 a のデータの値が，$a_k=\cos(2k\theta)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとする。ただし，$0<\theta<\pi$ である。

(1) データの平均値 $\overline{a}$ は，$\overline{a}=\dfrac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$ で与えられることを示せ。

(2) $n=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{20}$ のとき，データの標準偏差 s を求めよ。

22　　［信州大・医］

(1)　変量 a のデータの値が $a_k=\cos(2k\theta)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，平均値 $\overline{a}$ は，

$$\overline{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)$$

すると，$n\overline{a}=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)$ となり，

$$2n\overline{a}\sin\theta=\sum_{k=1}^{n}2\cos(2k\theta)\sin\theta=\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta\}$$
$$=\sin(2n+1)\theta-\sin\theta$$

よって，$\overline{a}=\dfrac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$ となる。

(2)　$\overline{a^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(2k\theta)=\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\{1+\cos(4k\theta)\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$

ここで，$\bar{b}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$ とおくと $n\bar{b}=\sum_{k=1}^{n}\cos(4k\theta)$ となり，(1)と同様にして，

$$2n\bar{b}\sin 2\theta=\sum_{k=1}^{n}2\cos(4k\theta)\sin 2\theta=\sum_{k=1}^{n}\{\sin(4k+2)\theta-\sin(4k-2)\theta\}$$
$$=\sin(4n+2)\theta-\sin 2\theta$$

よって，$\overline{a^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\bar{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4n\sin 2\theta}\{\sin(4n\theta+2\theta)-\sin 2\theta\}$ となる。

さて，$n=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{20}$ のとき，

$$\overline{a}=\frac{1}{20\sin\frac{\pi}{20}}\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{20}\right)-\sin\frac{\pi}{20}\right\}=\frac{-1}{20\sin\frac{\pi}{20}}\left(\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{\pi}{20}\right)=-\frac{1}{10}$$

$$\overline{a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{40\sin\frac{\pi}{10}}\left\{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{10}\right)-\sin\frac{\pi}{10}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{40\sin\frac{\pi}{10}}\left(\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}$$

すると，データの標準偏差 s は，

$$s=\sqrt{\overline{a^2}-(\overline{a})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{7}{10}$$

［解　説］

データの平均値と標準偏差についての問題です。(1)は，問題文にほのめかされていますが，積和公式を利用した有名な方法です。他には，ド・モアブルの定理と等比数列の和を組み合わせる方法も考えられますが。

$\boxed{23}$ ［北海道大・理］

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い, 出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{23}$　　［北海道大・理］

(1)　1 個のさいころを続けて n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。

このとき，出た目の最大公約数が 3 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 3 または 6 の場合から，すべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$$

(2)　まず，出た目の最大公約数が 2 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 2 または 4 または 6 の場合から，すべて 4 の場合およびすべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{3^n-2}{6^n}$ である。

また，出た目の最大公約数が 4 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 4 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 5 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 5 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 6 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 6 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

以上より，出た目の最大公約数が 1 となる確率は，

$$1-\left(\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}\right)=1-\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

(3)　出た目の最小公倍数が 20 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかで，しかも少なくとも 1 個が 4，かつ少なくとも 1 個が 5 の場合である。

まず，X_1，X_2，…，X_n がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかという事象を U とし，この中で，少なくとも 1 個が 4 であるという事象を A，少なくとも 1 個が 5 であるという事象を B とおくと，これらの確率について，

$$P(U)=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\frac{4^n}{6^n},\ P(\overline{A})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{3^n}{6^n},\ P(\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{3^n}{6^n}$$

そして，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は X_1，X_2，…，X_n がすべて 1 または 2 という事象になり，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{2^n}{6^n}$$

したがって，出た目の最小公倍数が 20 となる事象 $A\cap B$ の確率は，

$$P(U)-P(\overline{A\cap B})=\frac{4^n}{6^n}-P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{4^n}{6^n}-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$=\frac{4^n}{6^n}-\frac{3^n}{6^n}-\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}=\frac{4^n+2^n-2\cdot3^n}{6^n}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)は(1)の結果を利用し，余事象を考えています。また，(3)は構図がやや複雑なので，その整理のために，事象を記号で設定しました。

$\boxed{24}$　　［広島大・理］

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2，3 回目に出た目を a_3 とする。次に，1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k=1$，裏が出た場合は $b_k=a_k$ とおく。ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a_1+a_2+a_3=7$ である確率を求めよ。

(2)　$b_1=1$ である確率を求めよ。

(3)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率を求めよ。

24　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　さいころを 3 回投げ，1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2，3 回目に出た目を a_3 とするとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である事象を A とおく。

このとき，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ の組合せは，

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

よって，事象 A の確率は，$P(A)=\dfrac{1}{6^3}\times(3+3!+3+3)=\dfrac{5}{72}$ である。

(2)　さいころを 3 回投げた後に，1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ として，k 回目が表の場合は $b_k=1$，裏の場合は $b_k=a_k$ とおく。

このとき，$b_1=1$ であるのは，$a_1=1$ のときは硬貨の出方は任意，$a_1\neq1$ のときは硬貨が表の出る場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times1+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$

(3)　$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)=(1,\ 1,\ 1)$ である事象を B とおくと，(2)から，

$$P(B)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}$$

次に，$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 5)$ である事象を A' とおく。

すると，事象 $A'\cap B$ すなわち $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であるのは，さいころの 1 回目, 2 回目に 1, 3 回目に 5 出て，次に硬貨の 1 回目, 2 回目は任意, 3 回目に表が出る場合より，その確率は，

$$P(A'\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^4\cdot3^3}$$

よって，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率は，

$$P_B(A')=\frac{P(B\cap A')}{P(B)}=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2^4\cdot3^3}\div\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}=\frac{4}{343}$$

(4)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\}$ である事象を A_1，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 2,\ 4\}$ である事象を A_2，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 3,\ 3\}$ である事象を A_3，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{2,\ 2,\ 3\}$ である事象を A_4 とおくと，(1)より $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ となる。

(i)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_1\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2\cdot6^3}$$

(ii)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 2,\ 4\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_2\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3!=\frac{6}{2^2\cdot6^3}$$

(iii)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 3,\ 3\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_3\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2^2\cdot6^3}$$

(iv) $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{2,\ 2,\ 3\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_4\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2^3\cdot 6^3}$$

(i)～(iv)より，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{2\cdot 6^3}+\dfrac{6}{2^2\cdot 6^3}+\dfrac{3}{2^2\cdot 6^3}+\dfrac{3}{2^3\cdot 6^3}=\dfrac{33}{2^3\cdot 6^3}=\dfrac{11}{2^6\cdot 3^2}$

よって，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率は,

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{11}{2^6\cdot 3^2}\div\frac{7^3}{2^6\cdot 3^3}=\frac{33}{343}$$

［解 説］

条件付き確率を求める問題です。非常に細かな誘導が付いています。文系では, 空間ベクトルを平面ベクトルに変更した設定で出題されています。