1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

実数 a, b, c に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1)　b と c を a で表せ。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

1　　［北海道大・文］

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=3x^2-6ax+b$

条件より，$g(x)$ を１次関数として，$f(x)=f'(x)g(x)-6x$ ………①

$$f(x)+6x=f'(x)g(x) \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$f(x)+6x=x^3-3ax^2+(b+6)x+c$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)+6x=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}\right)+\left(-2a^2+\frac{2}{3}b+6\right)x+\left(\frac{ab}{3}+c\right)$$

すると，②から，$g(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$ となり，

$$-2a^2+\frac{2}{3}b+6=0 \cdots\cdots\cdots ③,\ \ \frac{ab}{3}+c=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③から $b=3a^2-9$ となり，④に代入すると，$c=-a^3+3a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-9)x-a^3+3a$

$$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2-9 = 3\{(x-a)^2-3\}$$

$f'(x)=0$ の解は $x=a\pm\sqrt{3}$ となることより，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	$\cdots$	$a-\sqrt{3}$	$\cdots$	$a+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，$f(a-\sqrt{3})>0$ かつ $f(a+\sqrt{3})<0$ であり，①から，

$$f(a-\sqrt{3})=-6(a-\sqrt{3})>0,\ \ f(a+\sqrt{3})=-6(a+\sqrt{3})<0$$

よって，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ である。

［解　説］

微分の応用題です。与えられた①式が(2)の極値を求める誘導になっています。

$\boxed{2}$ ［九州大・文］

k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

実数 k に対して，$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$ とおくとき，$f'(x)=3x^2-2kx+k$

ここで，3 次関数 $y=f(x)$ が極大値と極小値をもつことより，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことが必要で，その判別式 $D/4=k^2-3k>0$ から，

$$k<0,\ 3<k\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

このとき，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3},\ \beta=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

そして，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもち，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\big[f(x)\big]_\beta^\alpha=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\Big)^3=\frac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，条件より，$\frac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}=4|k|^3$ から，$(k^2-3k)^3=3^6k^6$ となり，

$$k^2-3k=9k^2,\ 8k^2=-3k$$

すると，$(*)$から，$k=-\frac{3}{8}$ となる。

［解　説］

3 次関数の極大値と極小値の差という有名問題です。なお，解答例はテクニカルな方法で記しましたが，普通に解と係数の関係を利用する解法でも構いません。

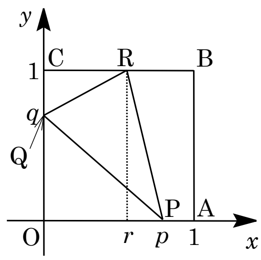
3　　　　［東京大・文］

座標平面の原点を O とし, O, $A(1,\ 0)$, $B(1,\ 1)$, $C(0,\ 1)$を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点$P(p,\ 0)$, $Q(0,\ q)$, $R(r,\ 1)$はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり, 3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が$\dfrac{1}{3}$の三角形の 3 頂点であるとする。

(1) q と r を p で表し, p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$の最大値, 最小値を求めよ。

３　　　　［東京大・文］



(1)　3 点 $P(p,\ 0)$，$Q(0,\ q)$，$R(r,\ 1)$ に対して，$0<p\leqq 1$，$0<q\leqq 1$，$0\leqq r\leqq 1$ とし，まず $\triangle OPQ=\dfrac{1}{3}$ から，

$$\frac{1}{2}pq=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3p}\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\triangle PQR=\dfrac{1}{3}$ から，四角形 OPRQ の面積が $\dfrac{2}{3}$ となるので，$\dfrac{1}{2}(p+r)\cdot 1-\dfrac{1}{2}(1-q)r=\dfrac{2}{3}$ から，

$$p+r-r+qr=\frac{4}{3},\ p+qr=\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①②から $p+\dfrac{2r}{3p}=\dfrac{4}{3}$ となり，$3p^2+2r=4p$ より，$r=\dfrac{1}{2}p(4-3p)\cdots\cdots\cdots③$

ここで，①から $0<\dfrac{2}{3p}\leqq 1$ となり，$0<p\leqq 1$ のもとで，$p\geqq\dfrac{2}{3}\cdots\cdots\cdots④$

同様に，③から，$0\leqq\dfrac{1}{2}p(4-3p)\leqq 1$ となり，$0<p\leqq 1$ のもとで，

$$p(4-3p)\leqq 2,\ 3p^2-4p+2\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤はつねに成立するので，p のとりうる値の範囲は④から，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1\cdots\cdots\cdots⑥$

このとき，⑥から $1\leqq\dfrac{1}{p}\leqq\dfrac{3}{2}$ となるので，①より，$\dfrac{2}{3}\leqq q\leqq 1$

また，③から，$r=2p-\dfrac{3}{2}p^2=-\dfrac{3}{2}\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$ となり，⑥より，

$$2-\frac{3}{2}\leqq r\leqq\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{2}{3}$$

(2)　①③より，$\dfrac{CR}{OQ}=\dfrac{r}{q}=\dfrac{1}{2}p(4-3p)\cdot\dfrac{3p}{2}=\dfrac{3}{4}p^2(4-3p)$

ここで，$f(p)=p^2(4-3p)=-3p^3+4p^2$ とおくと，$\dfrac{CR}{OQ}=\dfrac{3}{4}f(p)$ となり，

$$f'(p)=-9p^2+8p=-p(9p-8)$$

すると，⑥における $f(p)$ の増減は右表のようになり，$\dfrac{CR}{OQ}$ の最大値は $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{256}{243}=\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{2}{3}$ となる。

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{8}{9}$	↗	$\frac{256}{243}$	↘	1

［解　説］

図形量の最大・最小に関する標準的な問題です。誘導が丁寧なうえ，計算も穏やかです。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大・医］

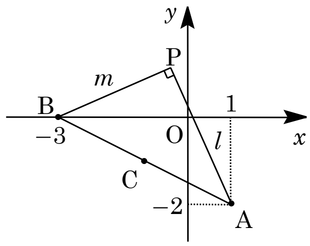
座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　△APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

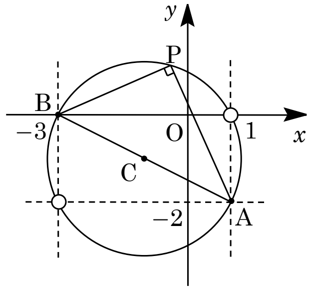
４　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大・医］



(1)　$l: y = ax - a - 2 = a(x-1) - 2$ ……①は点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y = bx + 3b = b(x+3)$ ……② は点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして，l と m は直交するので，$ab = -1$ ………③

実数 a，b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点Pは，線分ABを直径とする円を描く。



この円は中心が線分 AB の中点 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{………④}$$

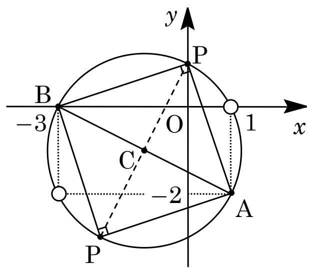
ただし，①は点 A を通る直線のうち $x = 1$ を表さず，②は点Bを通る直線のうち $x = -3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2)　②③から $m: y = -\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x + ay + 3 = 0$ となり，

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 - 2a + 3|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

また，①から $l: ax - y - a - 2 = 0$ となり，$\mathrm{BP} = \dfrac{|-3a - a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \dfrac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$



(3)　△APBの面積が最大となるのは，点Pと直線ABの距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より $\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ となり，(2)から，

$$\frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}},\ |2a - 4| = |4a + 2|$$

(i)　$2a - 4 = 4a + 2$ のとき　$2a = -6$ より $a = -3$

(ii)　$2a - 4 = -(4a + 2)$ のとき　$6a = 2$ より $a = \dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a = -3,\ \dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

$\boxed{5}$ 　　［東京大・文］

O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D，E をそれぞれ図示せよ。

(2) a，b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

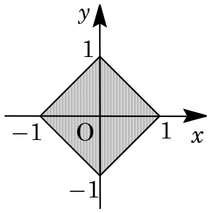
(1)　不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域 D を，x, y の符号で場合分けをして表すと，

(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y\leqq 1$ より，$y\leqq -x+1$

(ii)　$x<0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y\leqq 1$ より，$y\leqq x+1$

(iii)　$x<0,\ y<0$ のとき　$-x-y\leqq 1$ より，$y\geqq -x-1$

(iv)　$x\geqq 0,\ y<0$ のとき　$x-y\leqq 1$ より，$y\geqq x-1$



(i)～(iv)より，D は右図の網点部であり，境界は領域に含む。

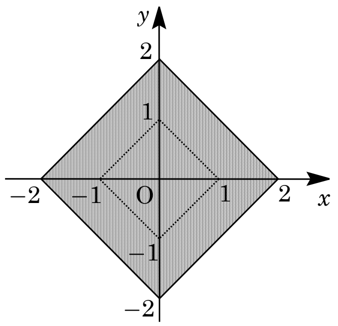
次に，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

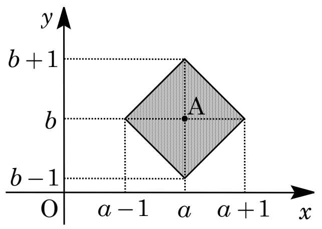
ここで，$-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ とおくと，対称性から点 Q′ は領域 D を動き，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

そこで，まず点 P を D 上で固定すると，点 R は，点 P を中心に領域 D を平行移動した正方形の内部または辺上を動く。

次に，この状態を保ったまま点 P を D 上で動かすと，点 R の動く範囲 E は，点 P を中心とする正方形の通過領域となり，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2)　不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ の表す領域 F を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)$ とおき，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと，点 P, Q は領域 D を動く。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})-(\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

よって，点 U が動く範囲 G は，点 R の動く範囲 E と一致する。

［解　説］

過去に幾度も出されていますが，任意に動く 2 点に対して，1 つの点をいったん固定して軌跡や領域を考えるという問題です。(2)は領域の絡んだ論証で，いろいろな書き方が考えられますが，上の解答例はその 1 例です。

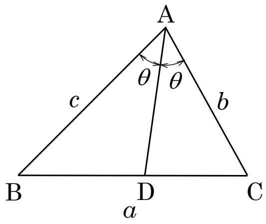
6　　［千葉大・理］

三角形 ABC は $AB+AC=2BC$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$AD=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle BAC$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。

6 ［千葉大・理］



(1) $\triangle$ABC に対して，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ とおく。また，$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a\cdots\cdots\cdots①,\ AD=15\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\triangle$ABC は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\theta=\angle BAD=\angle CAD$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{4}{25}=\frac{17}{25}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2) ⑥より，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\ bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\frac{84}{25}\cdot\frac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$BC=a=4\sqrt{21}$$

［解 説］

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

$\boxed{7}$　［東京医歯大］

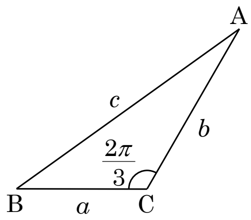
三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また a, b, c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

7　　　　［東京医歯大］



(1)　△ABC において，a，b，c がこの順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすので，

$2b = a + c$ ……①，$a \leqq b \leqq c$ ……②

ここで，$C = \dfrac{2\pi}{3}$ から，余弦定理を利用して，

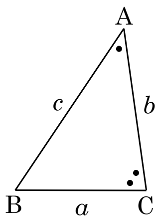
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\dfrac{2\pi}{3}$，$c^2 = a^2 + b^2 + ab$ ………③

①③から，$(2b - a)^2 = a^2 + b^2 + ab$ となり，

$4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + b^2 + ab$，$b(3b - 5a) = 0$

すると，$b = \dfrac{5}{3}a$，$c = 2\cdot\dfrac{5}{3}a - a = \dfrac{7}{3}a$ から，$a = 3k$ $(k > 0)$ とおくと，$b = 5k$，$c = 7k$ となり，②および $c < a + b$ を満たしており，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 49 - 9}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{13}{14}$$



(2)　$C = 2A$ のとき，$A < C$ より $a < c$ となるので，②を満たし，$B = \pi - A - 2A = \pi - 3A > 0$ から $0 < A < \dfrac{\pi}{3}$ ………④

すると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin(\pi - 3A)} = \dfrac{c}{\sin 2A} = 2R$ となり，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 3A} = \frac{c}{\sin 2A} = 2R$$

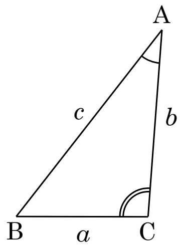
①に代入すると，$2\sin 3A = \sin A + \sin 2A$ から，

$2(3\sin A - 4\sin^3 A) = \sin A + 2\sin A\cos A$

$\sin A > 0$ から，$6 - 8\sin^2 A = 1 + 2\cos A$ となり，$5 - 8(1 - \cos^2 A) = 2\cos A$

$8\cos^2 A - 2\cos A - 3 = 0$，$(2\cos A + 1)(4\cos A - 3) = 0$

④から $\dfrac{1}{2} < \cos A < 1$ なので，$\cos A = \dfrac{3}{4}$ である。



(3)　$C = A + \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A < C$ より $a < c$ となるので，②を満たし，

$B = \pi - A - \left(A + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - 2A > 0$ から $0 < A < \dfrac{\pi}{3}$ ………⑤

(2)と同様にして，①から $2\sin B = \sin A + \sin C$ となり，

$2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - 2A\right) = \sin A + \sin\left(A + \dfrac{\pi}{3}\right)$

展開すると，$\sqrt{3}\cos 2A + \sin 2A = \dfrac{3}{2}\sin A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より，

$2\sin\left(2A + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(A + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$4\sin\left(A + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(A + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\left(A + \dfrac{\pi}{6}\right)$

すると，⑤から$\dfrac{\pi}{6} < A + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2}$となり，$\sin\left(A + \dfrac{\pi}{6}\right) > 0$なので，

$$4\cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A - 2\sin A = \sqrt{3}$から，$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A - 1)$となる。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$に代入すると，$\dfrac{3}{4}(4\cos^2 A - 4\cos A + 1) + \cos^2 A = 1$から，

$$16\cos^2 A - 12\cos A - 1 = 0$$

⑤から$\dfrac{1}{2} < \cos A < 1$なので，$\cos A = \dfrac{6 + \sqrt{52}}{16} = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{8}$である。

［解　説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが，(3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

８　　［東京工大］

(1)　$h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

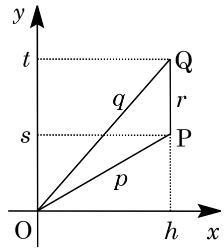
が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ $l,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。

8　　　　［東京工大］



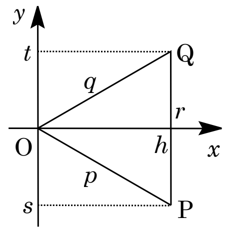
(1)　$h>0$，$s<t$ のとき，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(h,\ s)$，$\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対し，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$\mathrm{PQ}=r$ とすると，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}(t-s)h$$

このとき，$A=p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$ とおくと,

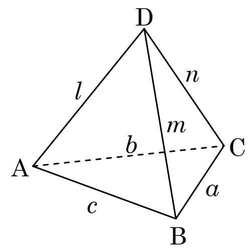
$$A=(h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-2\sqrt{3}(t-s)h$$
$$=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2t^2+2s^2-2ts$$
$$=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2t^2+2s^2-2ts$$
$$=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}s^2+ts=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(t+s)^2$$

すると，$A\geqq 0$ すなわち $p^2+q^2+r^2\geqq 4\sqrt{3}S$ が成立する。



また，等号が成立するのは，$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ かつ $t+s=0$ のときで，まとめると，$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ である。

このとき，$p=q=r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ となることより，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形である。



(2) 四面体 ABCD に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AD}=l$，$\mathrm{BD}=m$，$\mathrm{CD}=n$ とし，さらに $S_1=\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\triangle\mathrm{DAB}$，$S_3=\triangle\mathrm{DBC}$，$S_4=\triangle\mathrm{DCA}$ とおくと，(1)から,

$a^2+b^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_1$（等号は $a=b=c$ のとき）

$l^2+m^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_2$（等号は $l=m=c$ のとき）

$m^2+n^2+a^2\geqq 4\sqrt{3}S_3$（等号は $m=n=a$ のとき）

$n^2+l^2+b^2\geqq 4\sqrt{3}S_4$（等号は $n=l=c$ のとき）

この 4 つの不等式の各辺の和をとると,

$$2a^2+2b^2+2c^2+2l^2+2m^2+2n^2\geqq 4\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

そこで，四面体 ABCD の表面積を T とすると，$T=S_1+S_2+S_3+S_4$ から,

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\geqq 2\sqrt{3}T$$

また，等号がが成立するのは，$a=b=c=l=m=n$ のときで，このとき四面体 ABCD は正四面体である。

［解　説］

四面体を対象にした計量問題です。(1)の誘導が(2)の証明へとスムーズにつながっています。

$\boxed{9}$ ［神戸大］

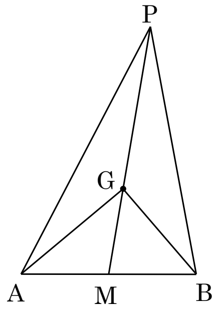
$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする。

$\boxed{9}$　　［神戸大］



(1)　△PAB の AB の中点 M に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PAB に余弦定理を適用すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ から，

$$4=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\frac{\pi}{2}$ のとき，△GAB は斜辺が AB = 2 の直角三角形より，

$$\mathrm{MG}=\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=1$$

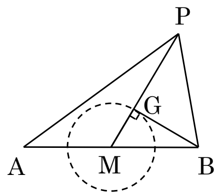
点 G は△PAB の重心なので，PM = 3GM = 3 となり，③から，

$$9=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1,\ \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=8$$

(3)　△PAB において，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，③から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4},\ |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\frac{3}{2}$$

すると，$\mathrm{GM}=\frac{1}{3}\mathrm{PM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ となり，点 G は点 M を中心として，半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く。



これより，∠ABG が最大になるのは，右図のように，BG がこの円に接するときである。このとき，MB = 1，$\mathrm{MG}=\frac{1}{2}$ から $\sin\angle\mathrm{ABG}=\frac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{ABG}=\frac{\pi}{6}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。この問題にはいろいろな解法があり，たとえば，(1)では中線定理の利用，(2)では $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0$ を変形する方法，(3)では座標系の設定などが考えられます。

10　　［名古屋大・理］

空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB'，C'とする。

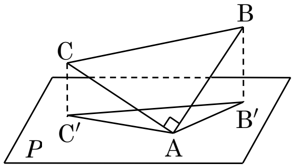
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$を示せ。

(3)　P 上の三角形$\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，P 上にない点 B, C から P に垂線を下ろし，P との交点をそれぞれ B′, C′ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$$

すると，線分 BB′ と CC′ はともに平面 P に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ ……(＊)である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$ は同じ向きに平行なので，$k>0$ として $\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=k\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ とおくことができる。すると，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-k\left|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\right|^2<0$$

これより，$\cos\angle\mathrm{B'AC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}||\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|}<0$ となり，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ である。

(3)　3 辺の長さが 4，$\sqrt{21}$，7 である△AB′C′ は，$\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ から最長辺 $\mathrm{B'C'}=7$ であり，また一般性を失うことなく $\mathrm{AB'}=4$，$\mathrm{AC'}=\sqrt{21}$ とすることができるので，

$$7^2=4^2+21-2\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{16+21-49}{2}=-6$$

すると，(＊)から，$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=-(-6)=6$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}||\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|=6$

さて，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=l$ とおくと，$\mathrm{B'B}=\sqrt{l^2-16}$，$\mathrm{C'C}=\sqrt{l^2-21}$ となり，

$$\sqrt{l^2-16}\cdot\sqrt{l^2-21}=6,\ \ (l^2-16)(l^2-21)=36$$

これより，$l^4-37l^2+300=0$ となり，$(l^2-25)(l^2-12)=0$

ここで，$l^2>16$ かつ $l^2>21$ なので $l^2=25$ となり，$\mathrm{AB}=l=5$ である。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。(1)が(2)へ，そして(1)と(2)が(3)へと，うまく繋がっています。

11　　　　［大阪大］

座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

11　　［大阪大］

(1)　球面 $S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7$ ……①は中心 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{7}$，球面 $S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$ ……②は中心 $\mathrm{B}(2,\ 3,\ 3)$ で半径 1 である。

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=3$ であり，

$$\sqrt{7}-1<\mathrm{AB}<\sqrt{7}+1$$

よって，S_1 と S_2 は交わり，その共通部分 C は円となる。

この円 C を含む平面 π は，①－②から，$(2x-3)+2(2y-4)+2(2z-4)=6$

$$2x+4y+4z=25\ \cdots\cdots\cdots ③$$

また，直線 AB は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 2)$ から，t を実数として，

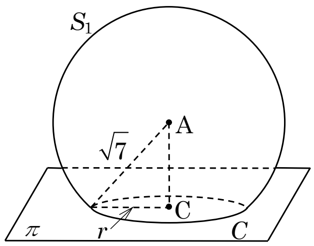
$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ 2)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

円 C の中心 C は，平面 π と直線 AB との交点なので，④を③に代入し，

$$2(1+t)+4(1+2t)+4(1+2t)=25,\ 18t+10=25$$

よって，$t=\dfrac{5}{6}$ より，中心の座標は $\mathrm{C}\left(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$ となり，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{1+4+4}=\frac{5}{2}$$



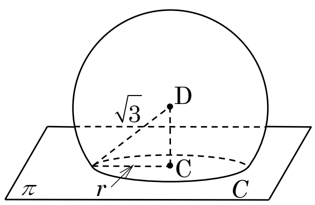
これより，円 C の半径 r は，

$$r=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，円 C を含む球面で半径が最小となるものは，円 C が大円になる球面なので，その方程式は，

$$\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$$

(2)　円 C を含み，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の中心を D とおくと，$\mathrm{DC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ ……⑤となる。



また，点 D は直線 AB 上の点なので，④から $\mathrm{D}(1+t,\ 1+2t,\ 1+2t)$ とおけ，

$$\mathrm{DC}=\sqrt{\left(1+t-\frac{11}{6}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2+\left(1+2t-\frac{8}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(t-\frac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\frac{5}{3}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

すると，⑤⑥から，$\left(t-\dfrac{5}{6}\right)^2+2\left(2t-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ となり，

$$9t^2-15t+4=0,\ (3t-1)(3t-4)=0$$

よって，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$，$t=\dfrac{4}{3}$ のとき $\mathrm{D}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$ なので，求める球面の方程式は，

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3,\ \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3$$

［解　説］

交わる 2 つの球面を題材にした問題で，以前は超頻出だったものです。いろいろな解法がありますが，平面の方程式がほぼ「常識化」したという背景も考え，解答例では 2 つの球面の交線を含む平面に注目しています。

$\boxed{12}$ ［信州大・医］

次の問いに答えよ。

(1) 2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2) n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{12}$ ［信州大・医］

(1) 自然数 n に対し，$2^n=(3-1)^n$ に注意して二項定理を適用すると，

$$2^n-1=(3-1)^n-1\equiv(-1)^n-1 \pmod 3$$

そこで，m を自然数とし，n を偶奇に場合分けして，以下，mod3 で記すと，

(i) n が偶数 $(n=2m)$ のとき $2^n-1\equiv(-1)^{2m}-1\equiv1-1\equiv0$

(ii) n が奇数 $(n=2m-1)$ のとき $2^n-1\equiv(-1)^{2m-1}-1\equiv-1-1\equiv-2\equiv1$

(i)(ii)より，2^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，$n=2m$ (m は自然数)である。

(2) k を 0 以上の整数として，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ とおくと，二項定理より，

$$n^n-1=(3k+l)^n-1\equiv l^n-1 \pmod 3$$

そこで，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ に場合分けして，以下，mod3 で記すと，

(i) $n=3k+1$ のとき $n^n-1\equiv1^n-1\equiv1-1\equiv0$

(ii) $n=3k+2$ のとき $n^n-1\equiv2^n-1$ となり，(1)から，

(ii-i) n が偶数のとき $2^n-1\equiv0$

(ii-ii) n が奇数のとき $2^n-1\equiv1$

(iii) $n=3k+3$ のとき $n^n-1\equiv3^n-1\equiv0^n-1\equiv0-1\equiv-1\equiv2$

(i)(ii)より，n^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，

$$n=3k+1,\ n=3k+2\ (n\text{ は偶数})$$

そこで，n を自然数 m を用いて表すと，

$$n=3(m-1)+1=3m-2,\ n=3(2m-2)+2=6m-4$$

［解 説］

整数問題の定番の 1 つです。類題にかすかな記憶があったので調べたところ，2003 年に一橋大で出題されていました。

$\boxed{13}$　　［京都大・理］

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

13 ［京都大・理］

整数 n に対し，$f(n)=n^3+2n^2+2=n^3+2(n^2+1)$ より n を偶奇に場合分けする。

(i) n が偶数のとき

このとき，$|f(n)|$ は偶数となり，$n+1$ は奇数から $|f(n+1)|$ は奇数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n)|=2$ となり，

$$n^3+2n^2+2=\pm 2$$

(i-i) $n^3+2n^2+2=2$ のとき

$n^3+2n^2=0$ から $n=0,\ -2$

$n=0$ のとき，$|f(n+1)|=|1^3+2\cdot 1^2+2|=5$ から素数である。

$n=-2$ のとき，$|f(n+1)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

(i-ii) $n^3+2n^2+2=-2$ のとき

$$n^3+2n^2+4=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①を満たす整数 n は負の偶数しかも 4 の約数から，$n=-2,\ -4$ が考えられる。

ところが，いずれも①は成立しない。

(ii) n が奇数のとき

このとき，$|f(n)|$ は奇数となり，$n+1$ は偶数から $|f(n+1)|$ は偶数である。

そこで，偶数の素数は 2 のみから，$|f(n+1)|=2$ となり，

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=\pm 2$$

(i-i) $(n+1)^3+2(n+1)^2+2=2$ のとき

$(n+1)^3+2(n+1)^2=0$ から $n+1=0,\ -2$，すなわち $n=-1,\ -3$

$n=-1$ のとき，$|f(n)|=|(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2|=3$ から素数である。

$n=-3$ のとき，$|f(n)|=|(-3)^3+2\cdot(-3)^2+2|=7$ から素数である。

(ii-ii) $(n+1)^3+2(n+1)^2+2=-2$ のとき

$$(n+1)^3+2(n+1)^2+4=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

(i-ii)と同様に，②を満たす整数 $n+1$ は存在しない。

(i)(ii)より，求める整数 n は，$n=0,\ -1,\ -2,\ -3$ である。

［解 説］

素数の絡んだ整数問題です。注目することは，「偶数の素数は 2 だけ」ということです。過去に何度も出題されていることですが。

14 ［名古屋大・理］

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

14 ［名古屋大・理］

(1) $\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと，$\sqrt{n}$ が整数でないことより，

$$a<\sqrt{n}<a+1\,,\ \ a^2<n<a^2+2a+1$$

すなわち，$n=a^2+k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2a)$ ……①とおくことができる。

ここで，$\sqrt{n}$ の小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数なので，

$$a+\frac{1}{100}\leqq\sqrt{n}<a+\frac{1}{10}\,,\ \left(a+\frac{1}{100}\right)^2\leqq n<\left(a+\frac{1}{10}\right)^2\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$\left(a+\dfrac{1}{100}\right)^2\leqq a^2+k<\left(a+\dfrac{1}{10}\right)^2$ となり，

$$\frac{a}{50}+\frac{1}{10000}\leqq k<\frac{a}{5}+\frac{1}{100}\ \cdots\cdots\text{③}$$

③を a について解くと，$\dfrac{a}{50}+\dfrac{1}{10000}\leqq k$ から $a\leqq 50k-\dfrac{1}{200}$，$k<\dfrac{a}{5}+\dfrac{1}{100}$ から $a>5k-\dfrac{1}{20}$ となるので，

$$5k-\frac{1}{20}<a\leqq 50k-\frac{1}{200}\ \cdots\cdots\text{④}$$

さて，a が最小となるのは $k=1$ のときで，④から $5-\dfrac{1}{20}<a\leqq 50-\dfrac{1}{200}$ なので，

$$a=5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 49$$

よって，条件に当てはまる最小の n は，$n=5^2+1=26$ である。

(2) まず，$k=2$ のとき，④から $10-\dfrac{1}{20}<a\leqq 100-\dfrac{1}{200}$ なので，

$$a=10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99$$

また，$k=3$ のとき，④から $15-\dfrac{1}{20}<a\leqq 150-\dfrac{1}{200}$ なので，

$$a=15,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 149$$

さらに，$k\geqq 4$ のとき，④より $a\geqq 20$ となる。

以上より，条件に当てはまる n を小さい方から並べていくと，

$$5^2+1,\ 6^2+1,\ 7^2+1,\ 8^2+1,\ 9^2+1,\ 10^2+1,\ 10^2+2,\ 11^2+1,\ 11^2+2,$$
$$12^2+1,\ 12^2+2,\ \cdots\cdots$$

すると，10 番目に小さいものは，$12^2+1=145$ になる。

［解 説］

おもしろい整数問題です。条件を満たす n が「平方数＋ちょっと」というのは感覚的にもわかりますが，その「ちょっと」を数式で評価することがポイントです。具体的には，③すなわち④ですが。

15　　　　［神戸大］

次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，…

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$ で, 4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$ とする。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　$S_n=2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ。

15　［神戸大］

(1)　1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる周期 3 の数列$\{a_n\}$に対し，この初項から第 n 項までの和をS_nとする。ここで，$S_3=8$に注意して，l を 0 以上の整数とすると，

(i)　$n=3l+1$のとき　$S_{3l+1}=8l+1$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-1}{3}+1=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{5}{3}$

(ii)　$n=3l+2$のとき　$S_{3l+2}=8l+4$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-2}{3}+4=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{4}{3}$

(iii)　$n=3l+3$のとき　$S_{3l+3}=8(l+1)$より，$S_n=8\cdot\dfrac{n-3}{3}+8=\dfrac{8}{3}n$

(2)　$2019=8\times252+3$なので，以下$\mathrm{mod}\,8$で記すと，$2019\equiv3$である。

さて，(1)から，$n=3l+1$のとき$S_n\equiv1$，$n=3l+2$のとき$S_n\equiv4$，$n=3l+3$のとき$S_n\equiv0$である。

これより，$S_n=2019$となる自然数 n は存在しない。

(3)　まず，任意の自然数 k に対して，k とk^2を 8 で割った余りについて表にまとめると，右のようになり，

$$k^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 8$$

また，(1)より，l を任意の 0 以上の整数とするとき，

$$S_{3l+1}=8l+1,\ S_{3l+2}=8l+4,\ S_{3l+3}=8(l+1)$$

すなわち，S_nは，8 で割ったときの余りが，1，4，0 であるすべての自然数を表す。

以上より，どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在する。

k	k^2
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

［解　説］

周期数列が題材の整数問題です。(2)は 3 つの場合について方程式を立ててもよいのですが，(3)との関連も考え，8 で割った余りに着目して処理をしています。

16　　［一橋大］

p を自然数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\ a_2 = p^2,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在することを示せ。

$\boxed{16}$ ［一橋大］

p を自然数とし，数列$\{a_n\}$に対して，$a_1=1$，$a_2=p^2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13$ から，

$$a_3=a_2-a_1+13=p^2-1+13=p^2+12$$

(i) $p=1$ のとき　$a_3=13$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(ii) $p=2$ のとき　$a_3=16$，$a_4=16-4+13=25$，$a_5=25-16+13=22$

これより，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iii) $p=3$ のとき　$a_3=21$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iv) $p=4$ のとき　$a_3=28$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(v) $p=5$ のとき　$a_3=37$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(vi) $p\geqq 6$ のとき　$12<2p+1$ なので，$p^2+12<p^2+2p+1=(p+1)^2$ となり，

$$p^2<a_3<(p+1)^2$$

これより，a_3は平方数でなく，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(i)～(vi)より，数列$\{a_n\}$には平方数でない項が存在する。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。$a_3=p^2+12$ という式をみて，不等式$a_3<(p+1)^2$を解いた結果，方針が決まりました。

17 ［千葉大・理］

$a_1=3$，$a_2=2$とし，$n \geqq 2$のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$として数列$\{a_n\}$を定める。

(1)　$n \geqq 2$のとき$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$が成り立つような自然数$n$を求めよ。

$\boxed{17}$ ［千葉大・理］

(1) $a_1=3$，$a_2=2$，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1\ (n\geqq 2)$……①で定められる$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)\quad (n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$n\geqq 2$において，

$$a_{n+1}+1=(a_2+1)a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=3\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

よって，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$……③が成り立つ。

(2) $n\geqq 2$のとき，①より，${a_n}^2=a_{n+1}-a_n+1$となり，③を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2={a_1}^2+\sum_{i=2}^{n}{a_i}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)$$

$$=9+(a_1a_2\cdots a_n-1)-2+n-1=a_1a_2\cdots a_n+n+5$$

ここで，条件より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$……④なので，

$$a_1a_2\cdots a_n+n+5=a_1a_2\cdots a_n+100,\quad n+5=100$$

よって，$n=95$となり，この値は$n\geqq 2$を満たしている。

なお，$n=1$のとき，条件④は$3^2=3+100$となり，成立しない。

［解 説］

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが，結論をみて②という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

18 ［北海道大・文］

n を自然数とする。数列2, 1, 2, 1, 1のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば, $n=1$ のときは, 1 項からなる数列 1 のみである。したがって, $s_1=1$ となる。$n=2$ のときは, 1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列1, 1の 2 つである。したがって, $s_2=2$ となる。

(1) s_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ。

(4) s_n を求めよ。

18 ［北海道大・文］

(1) 各項が 1 または 2 の有限数列について，すべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。

このとき，$n=3$ すなわち項の和が 3 となる数列には，2 項からなる数列 1，2 と 2，1，および 3 項からなる 1，1，1 があるので，これより $s_3=3$ である。

(2) すべての項の和が n となる数列の個数 s_n について，$n \geqq 3$ のとき，

(i) 初項が 1 のとき

第 2 項から第 n 項までの和が $n-1$ より，s_{n-1} 個の数列がある。

(ii) 初項が 2 のとき

第 2 項から第 n 項までの和が $n-2$ より，s_{n-2} 個の数列がある。

(i)(ii)より，$s_n = s_{n-1}+s_{n-2}$ ………①

(3) まず，$s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ ……②から，$s_n=(\alpha+\beta)s_{n-1}-\alpha\beta s_{n-2}$

すると，①から $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ となり，$(\alpha,\ \beta)$ は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解なので，1 組求めると，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(4) ②より，$s_{n+2}-\alpha s_{n+1}=\beta(s_{n+1}-\alpha s_n)\ (n \geqq 1)$ となり，

$$s_{n+1}-\alpha s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1} \text{ ………③}$$

同様に，$s_{n+2}-\beta s_{n+1}=\alpha(s_{n+1}-\beta s_n)\ (n \geqq 1)$ から，

$$s_{n+1}-\beta s_n=(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1} \text{ ………④}$$

③－④より，$(\beta-\alpha)s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1}-(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1}$ ………⑤

ここで，$s_1=1$，$s_2=2$ から，$s_2-\alpha s_1=2-\alpha=2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\beta^2$

$$s_2-\beta s_1=2-\beta=2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\alpha^2$$

⑤より，$(\beta-\alpha)s_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$ となり，$s_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

［解 説］

漸化式の応用問題です。(2)の関係を求めるところがポイントですが，隣接 3 項間型の場合は，原則的に最初か最後に着目するので，ここでは前者で解答例を書きました。

19　［新潟大・理］

半径がそれぞれ a, b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

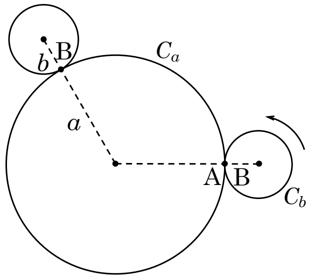
(1)　a, b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a, b を用いて表せ。

(2)　a, b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし，s, t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p, q, s, t を用いて表せ。

(3)　a, b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

19　　［新潟大・理］

(1)　まず, 半径が a の円 C_a 上に点 A, 半径が b の円 C_b 上に点 B をとる。はじめに点 A と点 B を一致させ, C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。そして, 点 B が点 A に再び一致するとき, C_b は m 周期回転し, 同時に C_a のまわりを n 回転したとすると,



$$2\pi b\cdot m = 2\pi a\cdot n\,,\ \ bm = an \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $a,\ b$ が自然数なので, $g=\gcd(a,\ b)$ として, $a=ga'$, $b=gb'$ とおくと, a' と b' は互いに素となり, ①より,

$$gb'm = ga'n\,,\ \ b'm = a'n$$

すると, m は a' の倍数となり, その最小数は $m=a'=\dfrac{a}{g}=\dfrac{a}{\gcd(a,\ b)}$ である。

(2)　a, b が正の有理数のとき, 既約分数で $a=\dfrac{p}{q}$, $b=\dfrac{s}{t}$ とおくと, ①より,

$$\frac{s}{t}m=\frac{p}{q}n\,,\ \ qsm = ptn \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, $g_1=\gcd(p,\ s)$, $g_2=\gcd(q,\ t)$ とおくと,

$$p=g_1p'\,,\ \ s=g_1s'\,,\ \ q=g_2q'\,,\ \ t=g_2t'$$

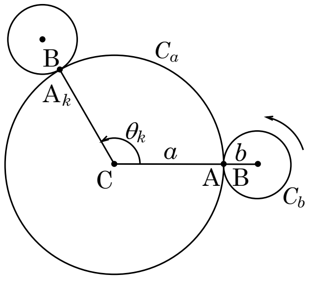
そして, p' と s' は互いに素, q' と t' は互いに素となり, ②より,

$$g_1g_2q's'm = g_1g_2p't'n\,,\ \ q's'm = p't'n$$

すると, p' と q' も互いに素, s' と t' も互いに素なので, m は $p't'$ の倍数となり, その最小数は $m=p't'=\dfrac{pt}{g_1g_2}=\dfrac{pt}{\gcd(p,\ s)\cdot\gcd(q,\ t)}$ である。

(3)　a, b が互いに素な自然数の場合, 点 B が点 A に再び一致するとき, (1)より, C_b は a 周期回転し, 同時に C_a のまわりを b 回転している。

ここで, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ として, C_b が k 周期回転したとき, 点 B が一致する C_a 上の点を A_k とし, CA から測った CA_k への角を θ_k とおくと,



$$2\pi b\cdot k = a\theta_k\,,\ \ \theta_k = 2\pi\cdot\frac{bk}{a}$$

さて, $bk\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ を a で割った商を q_k, 余りを r_k とおくと, $bk=aq_k+r_k\ (0\leqq r_k\leqq a-1)$ となり,

$$\theta_k = 2\pi\cdot\frac{aq_k+r_k}{a} = 2\pi q_k + 2\pi\cdot\frac{r_k}{a} \cdots\cdots\cdots ③$$

このとき, $1\leqq i<j\leqq a$ において, $r_i=r_j$ と仮定すると,

$$b(j-i) = a(q_j-q_i)+(r_k-r_j) = a(q_j-q_i)$$

すると，$j-i$ は a の倍数となるが，$1 \leqq j-i \leqq a-1$ より不適である。

よって，$1 \leqq i < j \leqq a$ のとき，$r_i \neq r_j$ となり，これより，

$$\{r_1,\ r_1,\ \cdots,\ r_a\} = \{0,\ 1,\ \cdots,\ a-1\}$$

したがって，③から，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分する。

［解 説］

図形の絡んだ整数問題です。題材は有名な外サイクロイドです。ただ, (3)の後半の余りでの評価は, 経験がないと難しいでしょう。

$\boxed{20}$ ［熊本大・医］

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

20　　　　［熊本大・医］

(1)　まず, 赤球 n 個, 白球 n 個, 合計 $2n$ 個入っている箱から, n 個の球を取り出す ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個$(0\leqq k\leqq n)$となるのは, ${}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}$ 通りであり, さらに ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ ……①を考え合わせると, その確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2)　取り出した n 個の球のうち赤球が k 個$(1\leqq k\leqq n)$となり, さらにゲームに勝つ確率 P_k は, $P_k=\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であり,

$${}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2\{(n-1)!\}^2}=\frac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

$${}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}=\frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

これより, $P_k=\dfrac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^2({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{\dfrac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ である。

(3)　ゲームに勝つ確率 P は, $P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$ ………②

ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2=({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ の値を求めるために, $(x+1)^{n-1}(x+1)^{n-1}=(x+1)^{2n-2}$ ……③に注意して左辺を展開し, ①を用いると,

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1})({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_0x^{n-1})$$

そして, この式の x^{n-1} の係数に着目すると, $({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ となり, また③の右辺を展開したとき, x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ であることより,

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2={}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると, ②④から, $P=\dfrac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}=\dfrac{n}{2(2n-1)}$ である。

［解　説］

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが, 上記の方法は修得しておくことの１つです。

$\boxed{21}$ ［千葉大・理］

コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって, これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚, 箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚, 箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚, 箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき, 次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。

21　　　　［千葉大・理］

(1)　条件より，さいころを 1 回振ってコインを 1 枚，箱 A，箱 B，箱 C に入れる確率は，それぞれ$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{3}{6}$である。

さて，さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインがそれぞれ 2 枚，2 枚，1 枚入っている確率は，

$$\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot2^2\cdot3}{6^5}=\frac{5}{108}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインが少なくとも 1 枚入っている事象をそれぞれA，B，Cとし，その確率を$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$とおくと，

$$P(\overline{A})=\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{5}{6}\right)^5,\ P(\overline{B})=\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$P(\overline{C})=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)^5=\left(\frac{3}{6}\right)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^5,\ P(\overline{B}\cap\overline{C})=\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$P(\overline{C}\cap\overline{A})=\left(\frac{2}{6}\right)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0$$

すると，箱 A，箱 B，箱 C いずれにもコインが 1 枚以上入っている確率は，

$$P(A\cap B\cap C)=1-P(\overline{A\cap B\cap C})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$の値は，

$$P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{B}\cap\overline{C})-P(\overline{C}\cap\overline{A})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5+\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{1}{6}\right)^5-\left(\frac{2}{6}\right)^5+0=\frac{4116}{6^5}=\frac{343}{648}$$

よって，②より，$P(A\cap B\cap C)=1-\dfrac{343}{648}=\dfrac{305}{648}$

(3)　さいころを 5 回振ったとき，コインが箱 A に 2 枚入っているのは，箱 B または C には 3 枚入っていることなので，その確率は，

$$\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^3=\frac{2\cdot5\cdot5^3}{6^5}=\frac{2\cdot5^4}{6^5}$$

すると，箱 A に 2 枚のコインが入っていたとき，箱 B にもコインが 2 枚入っている条件付き確率は，①を利用して，

$$\frac{5}{108}\div\frac{2\cdot5^4}{6^5}=\frac{5}{3\cdot6^2}\cdot\frac{6^5}{2\cdot5^4}=\frac{6^2}{5^3}=\frac{36}{125}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)は余事象の確率と和事象の確率を組み合わせた有名な解法で記述しました。

22　　　　［京都大］

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。このとき次の条件を満たす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0 = 0$ としておく。

条件：$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。

22　　［京都大］

1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とするとき，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような $k(1 \leqq k \leqq n)$ がただ 1 つという条件を満たす場合は，$X_0 = 0$ から，$2 \leqq k \leqq n$，$1 \leqq l \leqq n-k+1$ として，

$$X_i \leqq 4\ (1 \leqq i \leqq k-1),\ X_i \geqq 5\ (k \leqq i \leqq k+l-1),\ X_i \leqq 4\ (k+l \leqq i \leqq n)$$

この確率を $P_{k,\,l}$ とおくと，$k = n$ のときも含めて，

$$P_{k,\,l} = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{6}\right)^{l}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k-l+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}\left(\frac{1}{3}\right)^{l} = \frac{2^{n-l}}{3^n}$$

ここで，k の値を固定し，$l = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-k+1$ について，その和を P_k とおくと，

$$P_k = \sum_{l=1}^{n-k+1} P_{k,\,l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n-k+1} 2^{n-l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=k-1}^{n-1} 2^{l} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^{k-1}(2^{n-k+1}-1)}{2-1}$$

$$= \frac{2^n - 2^{k-1}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n} \cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$k = 1$ のとき，$X_0 = 0$ から，$1 \leqq l \leqq n$ として，

$$X_i \geqq 5\ (1 \leqq i \leqq l),\ X_i \leqq 4\ (l+1 \leqq i \leqq n)$$

この確率を $P_{1,\,l}$ とおくと，$P_{1,\,l} = \left(\frac{2}{6}\right)^{l}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-l} = \left(\frac{1}{3}\right)^{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l} = \frac{2^{n-l}}{3^n}$

上式は $l = n$ のときも成立し，$l = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，その和を P_1 とおくと，

$$P_1 = \sum_{l=1}^{n} P_{1,\,l} = \frac{1}{3^n}\sum_{l=1}^{n} 2^{n-l} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}$$

すると，$k = 1$ のときも$(*)$は成立している。

以上より，求める確率 P は，

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2^{k-1}}{3^n}\right\} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}\cdot\frac{2^n-1}{2-1} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}$$

$$= (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

与えられた条件を正確に把握して，確率を計算する問題です。問題文に「ただし $X_0 = 0$ としておく」と軽く記されていることが，着眼点として最優先のことがらでした。

$\boxed{23}$ ［東北大・理］

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1) $p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2) $p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3) $p(n,\ 2)$ を求めよ。

23　　［東北大・理］

(1)　条件の試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。

さて，試行を $n+1$ 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき，次の 2 つの場合がある。

(i)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個のとき

袋には，赤玉 4 個と白玉 6 個が入っているので，そこから赤玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{4}{10}p(n,\ 1)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)$ である。

(ii)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき

袋には，赤玉 3 個と白玉 7 個が入っているので，そこから白玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ である。

(i)(ii)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となる。

(2)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個であるのは，n 回のうち 1 回だけ赤玉を取り出し，それ以外は白玉を取り出す場合である。

初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っており，k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ だけに赤玉を取り出す確率は，$\left(\dfrac{5}{10}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{5}{10}\cdot\left(\dfrac{6}{10}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k}$ となり，

$$p(n,\ 1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(3)　(1)(2)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}\left\{5\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となり，

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

また，$p(2,\ 2)=\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{1}{5}$ となり，$p_n=p(n,\ 2)$ とおくと，$p_2=\dfrac{1}{5}$ で，

$$p_{n+1}=\frac{7}{10}p_n+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①を満たす 1 つの数列を $p_n=\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ (α，β は定数) とおくと，

$$\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots②$$

②から，$\dfrac{3}{5}\alpha=\dfrac{7}{10}\alpha+2$，$\dfrac{1}{2}\beta=\dfrac{7}{10}\beta-2$ となり，$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$

①－②より，$p_{n+1}-\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}-\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{7}{10}\left\{p_n-\alpha\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}-\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$ となり，

$$p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{p_2-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^2-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\quad(n\geqq 2)$$

$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$，$p_2=\dfrac{1}{5}$を代入して,

$$p_n+20\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{\frac{1}{5}+20\left(\frac{3}{5}\right)^2-10\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{49}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}=10\left(\frac{7}{10}\right)^n$$

よって，$p_n=10\left(\dfrac{7}{10}\right)^n-20\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$となるので,

$$p(n,\ 2)=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 2)$$

［解　説］

丁寧な誘導のついた確率と漸化式の標準的問題です。なお, (3)の漸化式の解法については「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。