1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1)　$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

1　　　　［千葉大］

(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ のとき，$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z^8=\frac{1}{z}=\cos\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$$

すると，$\alpha=z+z^8=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となり，$\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{\alpha}{2}$ ………①

ここで，3 倍角の公式より，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\cos^3\dfrac{2\pi}{9}-3\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，①より，

$$-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\alpha^3}{8}-3\cdot\frac{\alpha}{2},\ -1=\alpha^3-3\alpha,\ \alpha^3-3\alpha+1=0 \ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，α は $x^3-3x+1=0$ の解なので，$f(x)=x^3-3x+1$ となる。

(2)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると，②から，$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)$

すると，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha^2-3)}}{2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①から，$12-3\alpha^2=12-3\cdot 4\cos^2\dfrac{2\pi}{9}=12\sin^2\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，③より，

$$x=-\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}=2\Big(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)$$

$$=2\Big(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)=2\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\mp\frac{2\pi}{9}\Big)$$

よって，$x=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ または $x=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ となり，①②より，

$$2\cos\frac{4\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\Big)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-2=\alpha^2-2$$

$$2\cos\frac{8\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{4\pi}{9}-1\Big)=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$$

$$=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

以上より，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，α^2-2，$-\alpha^2-\alpha+2$ である。

［解　説］

複素数の極形式についての問題です。3 倍角の公式がポイントになりますが，問題文にその利用が暗示されています。また，解と係数の関係を併用すると，解答例が少し簡略になります。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

２ ［九州大］

まず，与えられた等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ に対して，

$$-i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=\alpha(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺に共役複素数をとると，$i(2|\alpha|^2+1)z=\overline{\alpha}(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots②$

①×②より，$(2|\alpha|^2+1)^2 z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}(|z|^2+2)^2$ となり，

$$(2|\alpha|^2+1)^2|z|^2=|\alpha|^2(|z|^2+2)^2,\ (2|\alpha|^2+1)|z|=|\alpha|(|z|^2+2)$$

$|z|$ についてまとめると，$|\alpha||z|^2-(2|\alpha|^2+1)|z|+2|\alpha|=0\cdots\cdots\cdots③$

(i) $|\alpha|=0\ (\alpha=0)$ のとき　③より $|z|=0$ となり，$z=0$ である。

(ii) $|\alpha|\neq 0\ (\alpha\neq 0)$ のとき　③より $(|\alpha||z|-1)(|z|-2|\alpha|)=0$ となり，

$$|z|=\frac{1}{|\alpha|},\ |z|=2|\alpha|$$

(ii-i) $|z|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ のとき　$|z|^2+2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=\dfrac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{\overline{\alpha}}{i(2|\alpha|^2+1)}\cdot\frac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{i\alpha}=-\frac{i}{\alpha}$$

(ii-ii) $|z|=2|\alpha|$ のとき　$|z|^2+2=4|\alpha|^2+2=2(2|\alpha|^2+1)$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}(2|\alpha|^2+1)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}}{i}=-2i\overline{\alpha}$$

［解 説］

複素数の計算についての問題です。題意は，与えられた等式から z を求めるわけですが，上の解答例では，$z\overline{z}=|z|^2$ という関係式を用いて邪魔な $\overline{z}$ を消去するという方針を立て，$|z|$ についての方程式③を導いています。

3 ［北海道大］

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

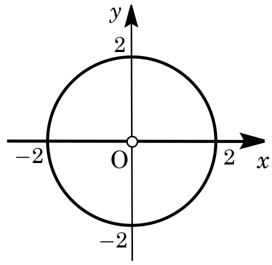
(2) k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

3 ［北海道大］

(1) $z\neq 0$ のとき，$z+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ となり，

$$z\overline{z}(z-\overline{z})+4(\overline{z}-z)=0,\ (z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$$



よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2$ から，z は 0 でない実数または絶対値が 2 の複素数である。これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部となる。ただし，原点は除く。

(2) k を実数とし，方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$……①に対して，(1)から，

(i) z が実数 $(z\neq 0)$ のとき

$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$ および $z-\dfrac{4}{z}$ は実数より，$z-\dfrac{4}{z}\neq 0$ のときは①が成立しない。

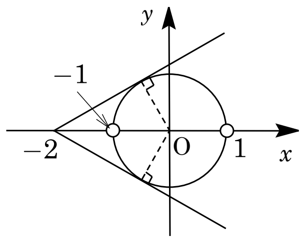
すると，$z-\dfrac{4}{z}=0$ から $z=\pm 2$ となり，このとき $k=0$ である。

(ii) z が $|z|=2$ を満たす虚数のとき

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\ (\sin\theta\neq 0)$ と表せ，$\dfrac{4}{z}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$z+\frac{4}{z}=4\cos\theta,\ z-\frac{4}{z}=4i\sin\theta$$

①に代入すると，$k(4\cos\theta+8)=-4\sin\theta$，$k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$ ………②



②から，$-k=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$ と表せ，$-k$ は原点が中心の単位円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $(-2,\ 0)$ を結ぶ線分の傾きとなる。

そこで，$\sin\theta\neq 0$ に注意し，右図の円の接線と x 軸のなす角が $\pm 30^\circ$ から，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq -k\leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ (k\neq 0)$ となり，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より，①が成り立つ k の値の範囲は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

複素数についての総合的な問題です。(1)では「z が実数 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$」に着目して数式処理をしています。また，(2)は①式の形から極形式を設定しました。なお，後半は微分法の利用でも構いませんが，上記の線分の傾きを対応させる方法も有名です。

$\boxed{4}$ ［東北大］

α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) 方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

4　　［東北大］

(1)　複素数 α に対し，複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，$z=0$ では成立しないことより $z\neq 0$ となり，①より，

$$\alpha=\frac{z^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，方程式①が実数解をもつとき，t を実数として $z=t$ を②に代入すると，

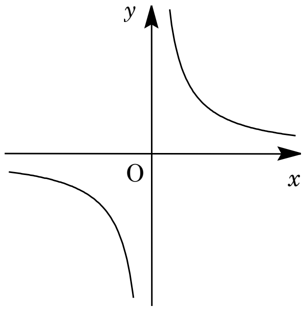
$$\alpha=t+\frac{2}{t}i\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，

$$x=t,\ \ y=\frac{2}{t}$$

これより，点 α は複素数平面上で双曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を描く。

図示すると，右図のようになる。



(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつとき，θ を実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

②に代入すると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$\alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，点 α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点 β は,

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

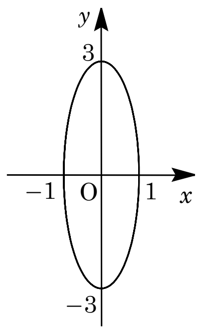
④⑤より，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\}$ となり，

$$\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\{(-\cos\theta+\sin\theta)+3i(\sin\theta+\cos\theta)\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$\beta=x+yi$ とおくと，⑥より，

$$x=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \ y=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，点 β は複素数平面上で楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ を描く。図示すると，右図のようになる。



［解　説］

複素数平面上の軌跡に関する問題です。点 α や点 β の軌跡を求めるので，与えられた①ではなく，変形した②をもとに計算を進めています。

5　　［熊本大］

複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

(1) Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。w の絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$ ［熊本大］

(1) 複素数平面上で，$\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}(-i)$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$ より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

すると，点 P の描く図形 H は 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

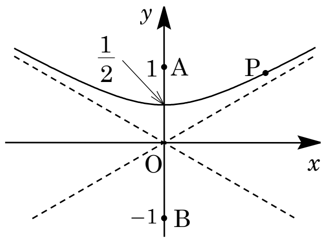
ここで，$z=x+yi$ とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ とすると，$c=1$ かつ $2b=1$ で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$ となり，漸近線は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ただし，$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$ より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。



そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が $\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$ で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2) $w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$ となり，(1)より $|z|\geqq\dfrac{1}{2}$ なので $0<r_2\leqq 2$ である。

また，n を整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$ より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ より $n=1$ として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$ である。

［解 説］

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

6 ［筑波大］

複素数αに対して，複素数平面上の 3 点O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(Ⅰ)　αは実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ)　$|\alpha|>1$である。

(Ⅲ)　三角形OABは直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　αがSに属するとき，$\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(2)　集合Sを複素数平面上に図示せよ。

(3)　$x,\ y$ を$\alpha^2=x+yi$を満たす実数とする。αが S を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求め，図示せよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ に対して，$\triangle\mathrm{OAB}$ は直角三角形より，

(a)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\arg\alpha=\theta$ とおくと $\arg\alpha^2=2\theta$ となり，n を整数として，

$$2\theta-\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

ところが，これは α が純虚数でないことに反する。

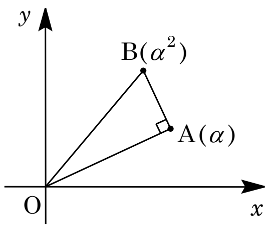
(b)　$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　辺 OA が斜辺となるので，$\mathrm{OA}>\mathrm{OB}$ となり，

$$|\alpha|>|\alpha^2|=|\alpha|^2,\ \ 1>|\alpha|$$

ところが，これは $|\alpha|>1$ に反する。

(a)(b)より，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2$ となり，



$$|\alpha^2|^2=|\alpha|^2+|\alpha^2-\alpha|^2$$

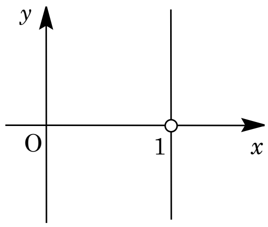
すると，$\alpha^2\overline{\alpha^2}=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)(\overline{\alpha^2-\alpha})$ から，

$$\begin{aligned}\alpha^2(\overline{\alpha})^2&=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)\{(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}\}\\&=\alpha\overline{\alpha}+\alpha^2(\overline{\alpha})^2-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2+\alpha\overline{\alpha}\end{aligned}$$

これより，$2\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2=0$ となり，

$$\alpha\overline{\alpha}(2-\alpha-\overline{\alpha})=0$$

$\alpha\overline{\alpha}>0$ より，$2-\alpha-\overline{\alpha}=0$ となり，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$



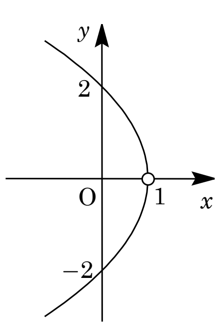
よって，α の実部は 1 となるので，α 全体を図示すると右図の直線である。ただし，$\alpha=1$ は除く。

(3)　(2)より，0 でない実数 k をとり，$\alpha=1+ki$ とおくと，

$$\alpha^2=(1+ki)^2=1-k^2+2ki\ (k\neq0)$$

ここで，$\alpha^2=x+yi$ なので，$x=1-k^2$，$y=2k$ となり，

$$x=1-\frac{y^2}{4}\quad(y\neq0)$$



よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡を図示すると，右図の放物線となる。ただし，点 $(1,\ 0)$ は除く。

［解　説］

複素数と図形についての標準的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では三平方の定理を利用しました。

7 ［広島大］

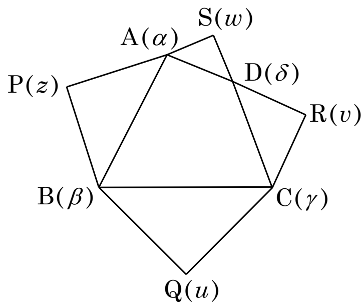
複素数平面上の 4 点A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が180°より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を表す複素数を求めよ。

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

7 ［広島大］



(1) 複素数平面上で，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD に対し，その外側に 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。このとき，P(z)，Q(u)，R(v)，S(w)とおく。

すると，P は B を中心に A を$\frac{\pi}{4}$回転し，距離を$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍したものとなり，

$$z-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha-\beta)=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)$$

よって，$z=\frac{1+i}{2}\alpha+\frac{1-i}{2}\beta$である。

(2) (1)と同様にして，$u=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma$，$v=\frac{1+i}{2}\gamma+\frac{1-i}{2}\delta$，$w=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha$

さて，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$$\frac{z+v}{2}=\frac{u+w}{2},\ z+v=u+w$$

すると，$\frac{1+i}{2}\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1+i}{2}\gamma+\frac{1-i}{2}\delta=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma+\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha$

$$i\alpha-i\beta+i\gamma-i\delta=0,\ \alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\beta+\delta}{2}$となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，(*)より$\delta=\alpha-\beta+\gamma$となり，

$$w-z=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta$$
$$=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta+\gamma)+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

また，$u-z=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=-\frac{1+i}{2}\alpha+i\beta+\frac{1-i}{2}\gamma$から，

$$i(u-z)=-\frac{i+i^2}{2}\alpha+i^2\beta+\frac{i-i^2}{2}\gamma=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

よって，$w-z=i(u-z)$となり，すなわち S は P を中心に Q を$\frac{\pi}{2}$回転したものとなるので，PS$=$PQ かつ$\angle$QPS$=\frac{\pi}{2}$より四角形 PQRS は正方形である。

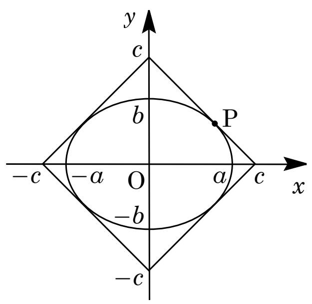
［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。なお，(2)の平行四辺形については，「2 本の対角線が互いに他を二等分する」という条件を利用しています。

8　　［金沢大］

$a,\ b,\ c$ を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき，不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

8 ［金沢大］



楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の第 1 象限の接点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，接線の方程式は，

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

この接線が，点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$ を通るので，

$$\frac{c\cos\theta}{a}=1\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{c\sin\theta}{b}=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ となり，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots③$

このとき，第 1 象限の接点の座標は $\left(\dfrac{a^2}{c},\ \dfrac{b^2}{c}\right)$ となり，4 つの接点を結んでできる四角形は，対称性から長方形となるので，③を利用すると，その面積 S は，

$$S=4\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{4a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また，楕円 C で囲まれる図形の面積 T は，

$$T=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\pi ab}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4ab}{\pi(a^2+b^2)}=\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab,\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\leqq 1\ \ (\text{等号は}\ a=b\ \text{のとき成立})\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$，すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つ。

また，等号成立は，③も合わせると，$a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ のときである。

［解 説］

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると，相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも，c と θ で処理する手もありますが。

9 ［神戸大］

k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3)　(2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

9　　　　［神戸大］

(1)　k を 2 以上の整数とし，$f(x)=\dfrac{1}{k}\Big((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\Big)\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\Big(k-1-\frac{k-1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

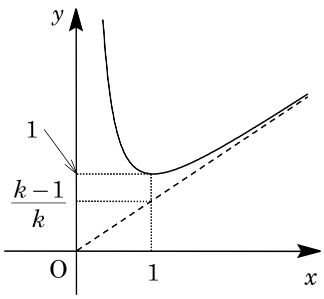
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\Big(k-1+\frac{1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\frac{k-1}{k}x\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\dfrac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$のとき，$x_n>1$であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$のとき　$x_1>1$より成立する。

(ii)　$n=l$のとき　$x_l>1$と仮定すると, (1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$となる。

よって，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$である。

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)\cdots\cdots\cdots$①

ここで，$x_n>1$のとき，平均値の定理より，ある $c_n\ (1<c_n<x_n)$ において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$となるので,

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\Big(1-\frac{1}{c_n^k}\Big)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq2$ で $0<1-\dfrac{1}{c_n^k}<1$ から，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)\cdots\cdots\cdots$③

すると，$x_n-1>0$ であり, ③から $n\geqq2$ において,

$$0<x_n-1<(x_1-1)\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\dfrac{k-1}{k}<1$ から, ④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解　説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線, (3)の平均値の定理の利用については，必須技法の 1 つです。

$\boxed{10}$ ［筑波大］

$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0 < f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$\left|a_{n+1}-\pi\right| \leqq \dfrac{2}{\pi}\left|a_n-\pi\right|$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

10　　［筑波大］

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ に対して，$f(\pi)=\displaystyle\int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ となる。

$t=\pi\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\dfrac{\pi}{\cos^2\theta}d\theta=\pi(1+\tan^2\theta)d\theta$ より，

$$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\pi}{\pi^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\pi(1+\tan^2\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

また，$f'(x)=\dfrac{4\pi}{x^2+\pi^2}$ となり，$x\geqq\pi$ のとき $x^2+\pi^2\geqq 2\pi^2$ から，

$$0<\frac{1}{x^2+\pi^2}\leqq\frac{1}{2\pi^2},\ \ 0<f'(x)\leqq\frac{1}{2\pi^2}\cdot 4\pi=\frac{2}{\pi}$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=c\geqq\pi$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たすとき，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=c\geqq\pi$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k\geqq\pi$ と仮定する。

このとき，(1)より $\pi=f(\pi)$ で，しかも $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加するので，

$$a_{k+1}-\pi=f(a_k)-f(\pi)\geqq 0$$

よって，$a_{k+1}\geqq\pi$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つ。

(3)　まず，$a_n=\pi$ のときは $a_{n+1}=f(\pi)=\pi$ となり，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ は成立。

次に，$a_n>\pi$ のときは，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\pi)=f'(b_n)(a_n-\pi)\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

すると，$a_{n+1}-\pi=f(a_n)-f(\pi)$ と合わせて，

$$|a_{n+1}-\pi|=|f(a_n)-f(\pi)|=|f'(b_n)||a_n-\pi|\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

ここで，(1)から $0<f'(b_n)\leqq\dfrac{2}{\pi}$ なので，$|f'(b_n)||a_n-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ となり，

$$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$$

以上より，すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立ち，

$$|a_n-\pi|\leqq|a_1-\pi|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $(c-\pi)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\pi|=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$$

［解　説］

平均値の定理を利用して，数列の極限を求める有名問題です。

$\boxed{11}$　　　　［名古屋大］

自然数 n に対し，定積分 $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ を示せ。

(2)　$0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

11　　［名古屋大］

(1)　$I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx$ に対して，$I_{n+2}=\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$ より，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}\leqq\dfrac{x^n}{x^2+1}$ より，$0\leqq\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\leqq\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx$

$$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$I_{n+2}\geqq 0$ となり，①から $I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3)　$n\geqq 3$ のとき，②から $0\leqq I_{n+2}\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ となるので，①より，

$$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq 2I_n\,,\ \ \frac{1}{n-1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n$$

よって，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{2(n-1)}$ から，$\dfrac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\dfrac{n}{2(n-1)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$$

(4)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}$ に対して，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ とおく。

①から，$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ となるので，$a_n=(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-(I_7+I_9)+\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})\\&=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}\end{aligned}$$

ここで，④より $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ となるので，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n+1}=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

［解　説］

定積分と極限の融合問題です。問題文にも暗示されているように，(1)→(2)→(3)という流れと，(1)→(2)→(4)という流れで，設問が構成されています。

$\boxed{12}$ ［名古屋大］

a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

(1)　$a>1$ のとき，$y=a^x$ ……①と $y=\log_a x$ ……②のグラフが，共有点 $(p,\ q)$ をもつとすると，①②から，$p>0$，$q>0$ で，

$$q=a^p\ \cdots\cdots\text{③},\quad q=\log_a p\ \cdots\cdots\text{④}$$

④より，$p=a^q$ となり，③と合わせて，$\dfrac{q}{p}=a^{p-q}$ ………⑤

(i)　$p>q$ のとき　$0<\dfrac{q}{p}<1$ で $a^{p-q}>1$ より，⑤は成立しない。

(ii)　$p<q$ のとき　$\dfrac{q}{p}>1$ で $a^{p-q}<1$ より，⑤は成立しない。

(iii)　$p=q$ のとき　$\dfrac{q}{p}=1$ で $a^{p-q}=1$ より，⑤は成立する。

(i)～(iii)より，①と②のグラフが共有点をもつとき，それは直線 $y=x$ 上にある。

(2)　(1)より，①と②のグラフが共有点は，②と直線 $y=x$ の共有点なので，

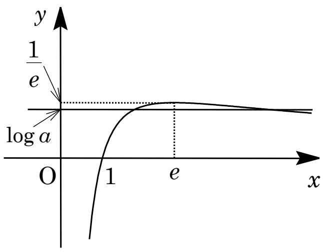
$$x=\log_a x,\quad x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log a=\frac{\log x}{x}\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

さて，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)=\log a$ の解が①と②のグラフが共有点の x 座標に対応し，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図の曲線である。



ここで，$a>1$ から $\log a>0$ に注意すると，⑥の解は 2 個以下，すなわち①と②のグラフの共有点は 2 個以下である。

(3)　①と②のグラフの共有点が 1 個であるとき，(2)より，$x=e$ となり，共有点の座標は $(e,\ e)$ である。また，このとき $\log a=\dfrac{1}{e}$ より，$a=e^{\frac{1}{e}}$ となる。

［解　説］

微分の方程式への応用問題です。(1)と(2)は，題意を考えると，グラフから明らかというわけにはいきません。また，(2)では $y=\log_a x$ と $y=x$ の組合せで処理しましたが，$y=a^x$ と $y=x$ を組合せでも構いません。対数は微分と相性良しと思い，前者を選択しただけですので。

13 ［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2) x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

13　　［大阪大］

(1)　まず，$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となり，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ………①

次に，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\Big(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\Big)-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{4+4x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

これより，$g(x)>g(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\log(1+x)$ ………②

①②から，$x>0$ で，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ………③

(2)　$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……④に対して，

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-(1+x)\{\log(1+x)\}^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

②より，$\dfrac{x^2}{1+x}>\{\log(1+x)\}^2$ すなわち $x^2>(1+x)\{\log(1+x)\}^2$ となり，$y'<0$ から，④は $x>0$ で単調に減少する。

ここで，$x\to\infty$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to 0$ である。

また，$0<x<2$ において，$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}>0$ となるので，③から，

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)},\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

すると，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{2-(2-x)}{x(2-x)}=\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}$$

よって，$x\to+0$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to\dfrac{1}{2}$ となる。

以上より，$x>0$ で，④のとり得る範囲は，$0<y<\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

微分の応用と関数の極限に関する基本的な問題です。

$\boxed{14}$ ［広島大］

次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。 $\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　$f(t)=e^t-1-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，これより $f(t)\geqq 0$ であり，

$$1+t\leqq e^t \cdots\cdots\cdots ①$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ とし，$u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ から，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{u^2}du=1+\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

(3)　①より，$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\geqq\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots ②$$

また，①より $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$ となり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で $e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，(2)の結果を参照すると，②③から，

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

［解　説］

定積分と不等式についての問題です。(2)の結果が(3)へのざっくばらんな誘導となっています。なお，(2)の定積分の計算は頻出です。

15 ［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$ ………①

(i)　$(-x)^3\neq 1\ (x\neq -1)$のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=\frac{1-(-x)^{3(n+1)}}{1-(-x)^3}=\frac{1-(-1)^{3(n+1)}\cdot x^{3(n+1)}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{1-x+x^2}=(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(ii)　$(-x)^3=1\ (x=-1)$のとき

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=n+1$となり，$f_n(-1)=\dfrac{1}{1+1+1}-(1-1)(n+1)=\dfrac{1}{3}$

これは，②に$x=-1$をあてはめた値と一致する。

(i)(ii)より，$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ ………③

(2)　③より$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx$ ………④

ここで，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$より，$0\leqq x\leqq 1$において，

$$\frac{3}{4}\leqq x^2-x+1\leqq 1,\ 1\leqq\frac{1}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\frac{4}{3}x^{3n+3}dx=\frac{4}{3}\Big[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\Big]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$ ………⑤

④⑤より，$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ ………⑥

(3)　①より，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx$ ………⑦

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$に注意して，$I_k$を

$I_k=\displaystyle\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$とすると，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}I_k$となり，

$$I_k=\int_0^1(-1)^{3k}x^{3k}(1+x)dx=(-1)^k\int_0^1(x^{3k}+x^{3k+1})dx$$

$$=(-1)^k\Big[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\Big]_0^1=(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$と変形し，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$において，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta$となり，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \cdots\cdots\cdots ⑨$$

そこで，⑦から，$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$

$$\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$$

⑧⑨を代入すると，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \int_0^1 f_n(x)dx \cdots\cdots\cdots ⑩$$

さらに，⑥から，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \frac{4}{3(3n+4)} \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩⑪より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

［解　説］

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが，(1)と(2)での巧みな誘導のため，与えられた①を 0 から 1 まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが，内容は基本の組合せとなっています。

$\boxed{16}$ ［東京医歯大］

関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1) p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2) u を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq \frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3) p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。

16　　　　［東京医歯大］

(1)　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ に対して，

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

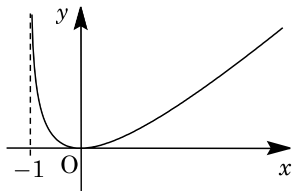
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\{x-\log(1+x)\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{\log(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\right\}=\infty$$

これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数は，$p<0$ のとき 0 個，$p=0$ のとき 1 個，$p>0$ のとき 2 個である。



(2)　(1)より，$y=f(x)$ に対し，$x\geqq0$ のとき y は $y\geqq0$ で単調に増加する。このとき，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

さて，$p\geqq0$，$q\geqq0$ として，$g(p)=q$ とおくと，$p=f(q)$ であり，

$$g(p)-p=q-f(q)=q-\{q-\log(1+q)\}=\log(1+q)\geqq0$$

よって，$p\leqq g(p)$ ………①

また，$u>0$ として，$F=\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u-g(p)$ と設定すると，

$f(u)=u-\log(1+u)$，$f'(u)=\dfrac{u}{1+u}$ であることより，

$$F=\frac{1}{f'(u)}\{f(q)-f(u)\}+u-q$$

(i)　$q=u$ のとき　$F=\dfrac{1}{f'(u)}\{f(u)-f(u)\}+u-u=0$

(ii)　$q>u$ のとき　平均値の定理より，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(u<c<q)$

ここで，$x>0$ で，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ は正で単調増加より，$f'(c)>f'(u)$ となり，

$$\frac{f(q)-f(u)}{q-u}>f'(u),\quad \frac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(iii)　$q<u$ のとき　(ii)と同様にして，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(q<c<u)$

そして，$f'(c)<f'(u)$ から $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}<f'(u)$ となり，$\dfrac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(i)〜(iii)より，$F\geqq0$ となり，$g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$ ………②

①②より，$p\leqq g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$

(3)　$p>0$ として，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(p,\ g(p))$ を通り，傾きが 1 の直線 l の方程式は，$q=g(p)$ とおくと，

$$y-q=x-p\,,\ \ y=x-p+q$$

そして，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形 D の面積を S とする。

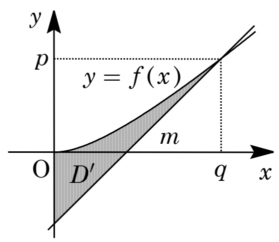
さて，$y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$，$y=x-p+q\Leftrightarrow x=y+p-q$ に注意して，図形 D を直線 $y=x$ に関して対称移動する。

すると，図形 D は直線 $m:y=x+p-q$ と y 軸および曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形に移り，この図形を D' とすると D' の面積も S である。

そこで，曲線 $y=f(x)$ と m の位置関係を考えると，$0\leqq x\leqq q$ で，

$$f(x)-(x+p-q)=f(x)-x-f(q)+q=-\log(1+x)+\log(1+q)\geqq 0$$

これより，図形 D' および図形 D は右図のようになり，

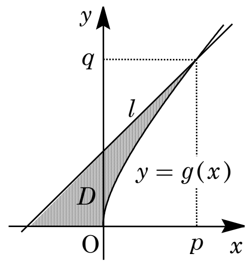


$$S=\int_0^q\{x-\log(1+x)-(x+p-q)\}dx$$

$$=\int_0^q\{-\log(1+x)-p+q\}dx$$

$$=-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^q+\int_0^q dx-(p-q)q$$

$$=-(1+q)\log(1+q)+q-(p-q)q$$



ここで，$p=f(q)$ より，$p=q-\log(1+q)$ となり，

$$S=-(1+q)(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=-q+p-q(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=p$$

［解　説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。盛りだくさんです。なお，(2)では，式の形から平均値の定理を利用しましたが，普通に微分しても構いません。また，(3)で l と曲線 $y=g(x)$ の位置関係について，(2)の不等式を利用することもできますが……。

$\boxed{17}$ ［大阪大］

2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1)　t が $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2)　t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3)　C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　まず，$f(t)=2\sin t+\cos 2t$ に対して，

$$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t=2\cos t-4\sin t\cos t=2\cos t(1-2\sin t)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1

これより，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

また，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ に対して，

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

これより，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

(2)　$0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(t_1)=f(t_2)$ より，$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_2-\sin t_1-\sin^2 t_2+\sin^2 t_1=0,\ (\sin t_2-\sin t_1)(1-\sin t_2-\sin t_1)=0$$

すると，$\sin t_2-\sin t_1>0$ から，$\sin t_1+\sin t_2=1$ ………①

さて，$g(t)^2=(2\cos t+\sin 2t)^2$ について，

$$g(t)^2=4\cos^2 t(1+\sin t)^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

ここで，$u=\sin t$ とおき，$h(u)=(1-u)(1+u)^3$ $(0\leqq u\leqq 1)$ と設定すると，

$$g(t)^2=4h(u)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$u_1=\sin t_1$，$u_2=\sin t_2$ とおくと，$0\leqq u_1<u_2\leqq 1$ となり，②から，

$$g(t_1)^2=4h(u_1),\ g(t_2)^2=4h(u_2)$$

また，①から，$u_1+u_2=1$ ………③

③から，$h(u_1)=(1-u_1)(1+u_1)^3=u_2(1+u_1)^3$，$h(u_2)=u_1(1+u_2)^3$ となり，

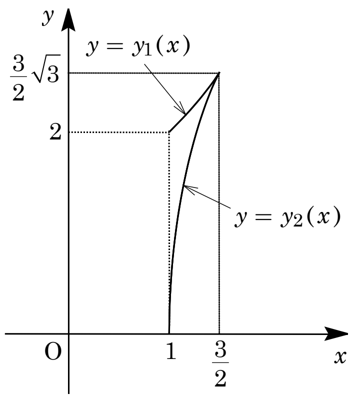
$$\begin{aligned}h(u_1)-h(u_2)&=u_2(1+u_1)^3-u_1(1+u_2)^3\\&=(u_2-u_1)+3u_1u_2(u_1-u_2)+u_1u_2(u_1^2-u_2^2)\\&=(u_2-u_1)\{1-3u_1u_2-u_1u_2(u_1+u_2)\}=(u_2-u_1)(1-4u_1u_2)\end{aligned}$$

ここで，③および $u_1<u_2$ に注意すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$1=u_1+u_2>2\sqrt{u_1u_2},\ 4u_1u_2<1$$

よって，$h(u_1)-h(u_2)>0$ となり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ である。

(3)　曲線 $C: x=f(t)$, $y=g(t)$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形は, (1)(2) から, 右図のようになる。ここで, C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分を $y=y_1(x)$, $\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y=y_2(x)$ とおくと, C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S は,



$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$
$$=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1(x)dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2(x)dx$$

ここで, 変数を x から t に置き換えると,

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\sin 2t\cos t-2\sin^2 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2t-\sin 3t-\sin t-1+\cos 4t)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(-1)+(-1)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

［解 説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。曲線 C の概形を書くために, (2)にかなりのボリュームのある問題が設定されています。

$\boxed{18}$ ［神戸大］

座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点P$(x,\ y,\ z)$から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

(2) P$(x,\ y,\ z)$が L の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。

$\boxed{18}$　［神戸大］

(1)　点 H は直線 OC 上の点なので，t を実数として，

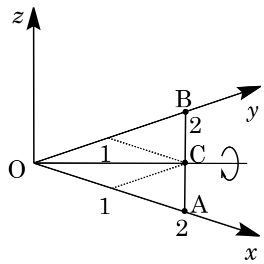
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t,\ 0)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x-t,\ y-t,\ z)$$

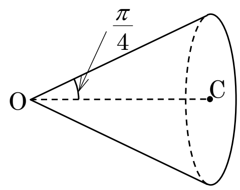
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$



よって，$t=\dfrac{x+y}{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$

(2)　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$ から，回転体 L は，線分 OC を中心軸とし，母線と中心軸のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点 P が L の点であるための条件は，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$0\leqq x+y\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x+y\geqq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$(x+y)^2\geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2\leqq 2xy\cdots\cdots\cdots③$$

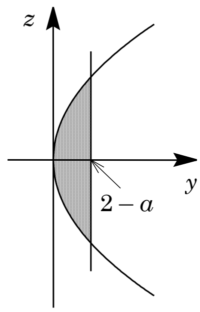
よって，②③より，$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$ である。

(3)　L を平面 $x=a\ (1\leqq a\leqq 2)$ で切った切り口は，③より，

$$z^2\leqq 2ay\cdots\cdots\cdots④$$

②より $0\leqq a+y\leqq 2$ から，$-a\leqq y\leqq 2-a\cdots\cdots\cdots⑤$

そして，④⑤を平面 $x=a$ 上に図示すると右図の網点部になり，その面積を $S(a)$ とおくと，y 軸に関する対称性から，



$$S(a)=2\int_0^{2-a}\sqrt{2ay}\,dy=2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a}(2-a)\sqrt{2-a}=\frac{4}{3}\sqrt{2}(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$ の体積を V とすると，

$$V=\int_1^2 S(a)da=\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I=\displaystyle\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$ とおくと，

$$I=\int_1^2(2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da=\int_1^2(2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s=a-1$ とおくと，$ds=da$ となり，

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}$，また $u=1-s^2$ とおくと $du=-2sds$ から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$ となるので，$V=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\Big(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ である。

［解 説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体 L が直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。

$\boxed{19}$ ［東北大］

xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　条件より，$S: x+y^2 \leqq 2$ ……①，$x+y \geqq 0$ ……②，$x-y \leqq 2$ ……③

まず，①と②の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x+y=0$ から，

$$y^2-y=2,\ (y-2)(y+1)=0$$

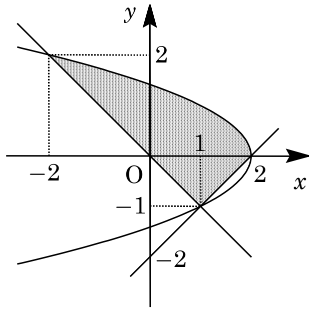
よって，$(x,\ y)=(-2,\ 2),\ (1,\ -1)$

また，①と③の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x-y=2$ から，

$$y^2+y=0,\ y(y+1)=0$$

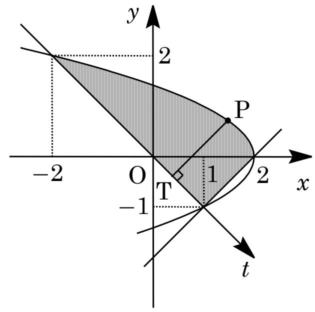
よって，$(x,\ y)=(2,\ 0),\ (1,\ -1)$

以上より，図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　①の境界線上に点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ をとり，P から直線 $y=-x$ に垂線を下ろし，その足を T とおく。

そして，右図のように t 軸を設定し，$\mathrm{OT}=|t|$ とすると，$\mathrm{T}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と表せる。



さて，P と直線 $y=-x$ すなわち $x+y=0$ との距離は，

$$\mathrm{PT}=\frac{|-y^2+2+y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-y^2+y+2|$$

ここで，$0 \leqq y \leqq 2$ において，$-y^2+y+2=-(y+1)(y-2) \geqq 0$ から，

$$\mathrm{PT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2) \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ の単位ベクトルの成分は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}=(-y^2+2,\ y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+1,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-1\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y+1$ となり，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2-y+2) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{PT}^2\,dt$$

ここで，変数を t から y に置換すると，⑤より，$t=-2\sqrt{2} \to \sqrt{2}$ のとき $y=2 \to 0$ となり，また $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy$ から，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_2^0\frac{1}{2}(-y^2+y+2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\Big]_0^2\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\Big)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

［解　説］

斜回転体の体積を求める問題です。計算量に配慮した設定となっていますが，それでも最後の定積分は面倒です。