1 ［東京大］

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

1 ［東京大］

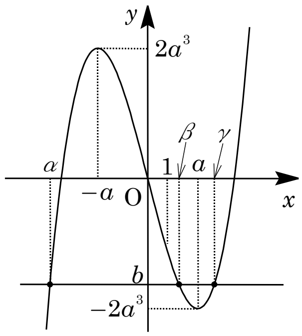
(1) $f(x)=x^3-3a^2x\ \ (a>0)$ に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗

すると，$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は，$0<a\leqq 1$ である。

(2) 方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもち，その解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$ であり，しかも $\beta>1$ である条件は，右図から，



$$a>1\cdots\cdots\cdots①$$
$$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，②の 2 つの境界線 $b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ の関係は，両式を連立すると，

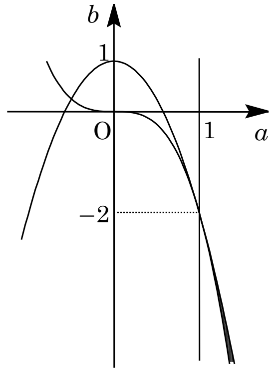
$$-2a^3=1-3a^2,\ 2a^3-3a^2+1=0$$
$$(2a+1)(a-1)^2=0$$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$ で交わり，$a=1$ で接する。

以上より，点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は，①②から，

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2$$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

2 ［金沢大・文］

関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)\,dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(2)$ を a を用いて表せ。

(2) a の値を求めよ。

(3) k は定数とする。$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

2　　　　［金沢大・文］

(1)　条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$

(2)　②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 \{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2 \{(a+1)t-1\}dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\Big]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$
$$=2a+1$$

よって，$a=-1$ となる。

(3)　(2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と $y=-x^2$ ……④を連立すると，

$xf(x)-k=-x^2$，$xf(x)+x^2=k$

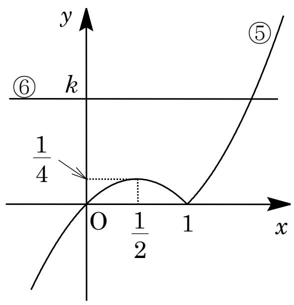
すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと $y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

(i)　$x\geqq 1$ のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(ii)　$x<1$ のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，右図より，

1 個$\left(k<0,\ \frac{1}{4}<k\right)$，2 個$\left(k=0,\ \frac{1}{4}\right)$，3 個$\left(0<k<\frac{1}{4}\right)$

［解　説］

置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。

3　　　　　　　　［千葉大］

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

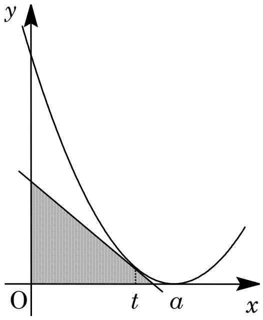
(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

３ ［千葉大］

(1) 曲線$y=(x-a)^2$に対し$y'=2(x-a)$となり，$0\leqq t<a$において，点$(t,\ (t-a)^2)$における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$
$$y=2(t-a)x-t^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，①とy軸との交点は$(0,\ -t^2+a^2)$となり，またx軸との交点は$\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$である。



そこで，接線①とx軸およびy軸で囲まれた領域$D(t)$の面積を$S(t)$とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) ②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

すると，$0\leqq t<a$における$S(t)$の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$は$t=\dfrac{a}{3}$のとき最大となり，最大値は，

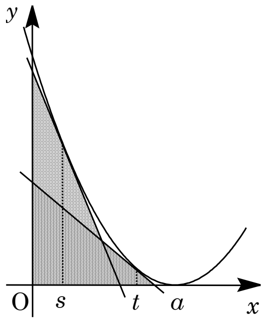
t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$

(3) $0\leqq s\leqq t<a$のとき，点$(s,\ (s-a)^2)$における接線の方程式は，①より，

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，2 つの領域$D(t)$と$D(s)$を合わせてできる領域$D(t)\cup D(s)$の面積を$T(t,\ s)$とすると，



(i) $0\leqq s=t<a$のとき

$T(t,\ s)=S(t)$より，(2)から最大値は$\dfrac{8}{27}a^3$である。

(ii) $0\leqq s<t<a$のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\ x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，tを$t=t_0\ (0<t_0<a)$で固定し，sを$0\leqq s<t_0$で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-t_0{}^3-at_0{}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}(t_0{}^3+t_0{}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\frac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

$$T\Big(t_0,\ \frac{t_0}{3}\Big)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\Big({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\Big)$$
$$=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\Big)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\Big(t,\ \frac{t}{3}\Big)$ とおき直すと，$U(t)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\Big)$ から,

$$U'(t)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\Big)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより，$U(t)$ は $t=\frac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は,

$$U\Big(\frac{3}{5}a\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\Big)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\frac{3}{5}a$，$s=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}a=\frac{a}{5}$ のとき，最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

［解　説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。

$\boxed{4}$　　　　［広島大・理］

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3) 座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。

4　　　　[広島大・理]

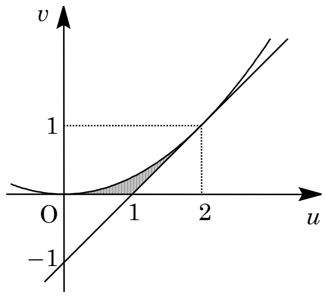
(1)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$-\dfrac{u^2}{4}+v\leqq 0$ ………①，$0\leqq\dfrac{u}{2}\leqq 1$ ………②

$f(0)=v\geqq 0$ ………③

$f(1)=1-u+v\geqq 0$ ………④



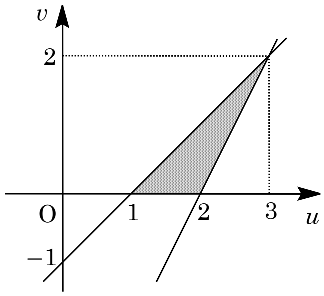
①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$f(0)=v\geqq 0$ ………⑤

$f(1)=1-u+v\leqq 0$ ………⑥

$f(2)=4-2u+v\geqq 0$ ………⑦

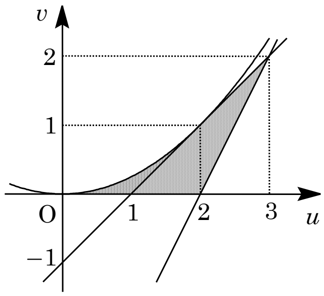


⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3)　点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，$x,\ y$ の条件は $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，解と係数の関係から，

$x+y=u$，$xy=v$



これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，

$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{12}\Big[u^3\Big]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

[解　説]

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

$\boxed{5}$　　［東京大・文］

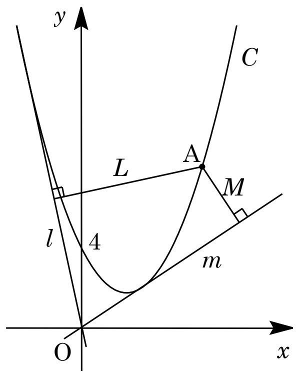
座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2-3x+4$ で定める。原点を通る 2 直線 l，m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 P$(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy \leqq 0$ が成り立つ。

5　　　　［東京大・文］



(1)　$C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。

①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0,\ a+3=\pm4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$，$m: y=x$ とおく。

ここで，C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し，A と $l,\ m$ の距離をそれぞれ $L,\ M$ とすると，

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(|t+2|+\sqrt{5}|t-2|)$$

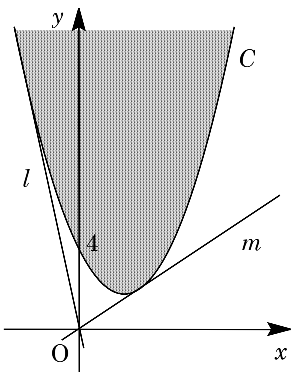
ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$ とおくと，

(i)　$t\geqq2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt{5}(t-2)=(1+\sqrt{5})t+2-2\sqrt{5}$

(ii)　$-2\leqq t<2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt{5}(t-2)=(1-\sqrt{5})t+2+2\sqrt{5}$

(iii)　$t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt{5}(t-2)=(-1-\sqrt{5})t-2+2\sqrt{5}$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。



(2)　領域 $D: y\geqq x^2-3x+4$ は右図の網点部のようになる。

そこで，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq0$ ……③が成り立つ条件は，

(a)　$q=0$ のとき　③は $px\leqq0$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$p=0$ である。

(b)　$q>0$ のとき　③は $y\leqq-\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する場合はない。

(c)　$q<0$ のとき　③は $y\geqq-\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$l,\ m$ の傾きから，

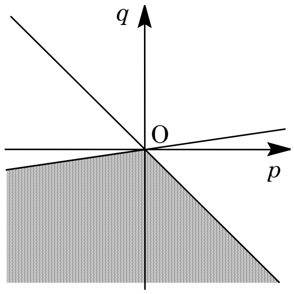
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1, \ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$ かつ $q \leqq -p$ である。

以上より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲は，

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{ かつ } q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

$\boxed{6}$　　　　［東北大・理］

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$, $D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

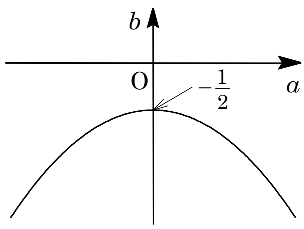
(1)　$C: y=(x-a)^2+b$ ……①，$D: y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2,\ \ 2x^2-2ax+a^2+b=0 \ \cdots\cdots ③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1,\ \ -a^2-2b=1$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2)　(1)のとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，①＋②より，

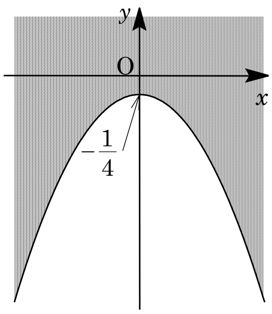
$$2y=(x-a)^2+b-x^2,\ \ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで，直線⑤が点 $(x,\ y)$ を通過する条件は，⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき，⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので，

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると，$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり，図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また，通過領域は実数解条件で処理しています。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

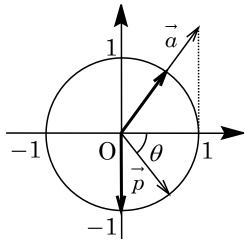
$\boxed{7}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

直線$l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi \quad (\varphi は\vec{a}と\vec{p}のなす角)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，θが$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を動くとき，$(*)$の$y$のとりうる値の範囲を考えると，

(i)　$x\geqq 0$のとき

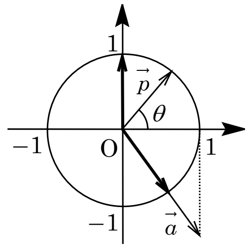


右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(ii)　$x<0$のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$である。

［解　説］

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは$\cos\theta$と$\sin\theta$のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

8　　［東京大・文］

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

8 ［東京大・文］

(1) $C: y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1 \leqq p \leqq 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2p,\ 2p^2)$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x = 2p$，$y = 2p^2$ から，

$$y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2,\ \ y = \frac{1}{2}x^2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$$

したがって，点 Q の軌跡は，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分である。

(2) 線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0 \leqq r \leqq 1)$ に対して，

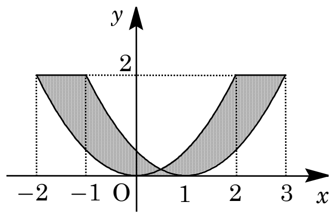
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで，点 R を固定すると，(1)から，点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き，その方程式は，

$$y = \frac{1}{2}(x - r)^2\quad (r - 2 \leqq x \leqq r + 2) \cdots\cdots\cdots (*)$$

そして，点 R を $0 \leqq r \leqq 1$ で動かすと，(*)で表される放物線の一部は，x 軸方向に平行移動する。

これより点 S が動く領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと，直線 $x = \frac{1}{2}$ についての対称性から，

$$S = 2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}x^2 dx + 1\cdot 2 - \int_{1}^{3} \frac{1}{2}(x-1)^2 dx\right\}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 dx + 4 - \int_{1}^{3} (x-1)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + 4 - \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8} + 4 - \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{95}{24}$$

［解 説］

軌跡を求める問題です。(2)は，東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。

9 ［信州大・医］

$0<t<3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a)，(b)を満たすようにとる。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

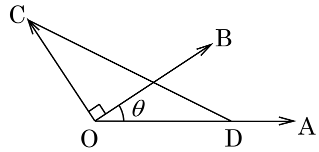
(b) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{9}$ ［信州大・医］

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③



ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，

$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，△OCD の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

［解 説］

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

10　　　　［京都大・理］

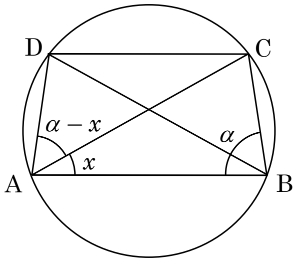
α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。

$\boxed{10}$ ［京都大・理］



半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle ABC = \angle DAB = \alpha \left(0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$\angle BCD = \angle ADC = \pi - \alpha$$

これより，四角形 ABCD は $AB /\!/ DC$ の等脚台形である。

さて，$\angle BAC = x\ (0 < x < \alpha)$ とおくと，$\angle CAD = \alpha - x$，$\angle ACB = \pi - (\alpha + x)$ となり，正弦定理より，

$$\frac{BC}{\sin x} = 2\cdot 1,\quad \frac{CD}{\sin(\alpha - x)} = 2\cdot 1,\quad \frac{AB}{\sin(\alpha + x)} = 2\cdot 1$$

すると，$BC = 2\sin x$，$CD = 2\sin(\alpha - x)$，$AB = 2\sin(\alpha + x)$ となり，$DA = BC$ から，4 辺の長さの積 $k = AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$ は，

$$k = 16\sin^2 x\sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x) = 8\sin^2 x(\cos 2x - \cos 2\alpha)$$
$$= 8\sin^2 x(1 - 2\sin^2 x - 1 + 2\sin^2\alpha) = -16\sin^4 x + 16\sin^2\alpha\sin^2 x$$
$$= -16\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2 + 4\sin^4\alpha$$

$0 < x < \alpha$ なので $0 < \sin x < \sin\alpha$ となり，$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\sin^2\alpha \left(\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$のとき，$k$ は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

［解　説］

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

$\boxed{11}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

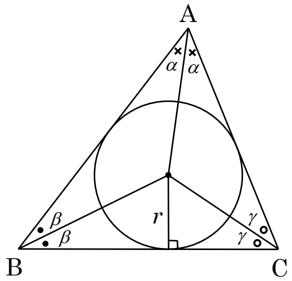
三角形 ABC の内接円の半径を r, 外接円の半径を R とし, $h=\dfrac{r}{R}$ とする。また, $\angle\mathrm{A}=2\alpha$, $\angle\mathrm{B}=2\beta$, $\angle\mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1)　$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2)　三角形 ABC が直角三角形のとき $h\leqq\sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。

(3)　一般の三角形 ABC に対して $h\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。

11　　［東北大・理］



(1)　△ABC において，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△ABC の内接円の半径 r に対して，

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$=r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ となり，$\mathrm{BC}=r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdots\cdots\cdots②$

また，△ABC の外接円の半径 R に対して，正弦定理から，

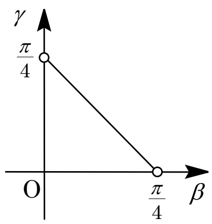
$$\mathrm{BC}=2R\sin2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\cdots③$$

②③から，$r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

$$h=\frac{r}{R}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　△ABC が直角三角形のとき，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}\left(\alpha=\dfrac{\pi}{4}\right)$としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ となり，④より，



$$h=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}\cos(\beta-\gamma)-1$$

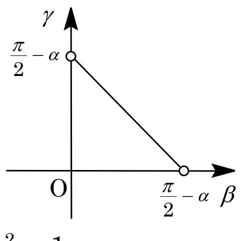
ここで，$-\dfrac{\pi}{4}<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq\sqrt{2}\cdot1-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma)=1$ すなわち $\beta=\gamma$ のとき成立するので，このとき△ABC は直角二等辺三角形となる。

(3)　まず，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}=2\sin\alpha\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$
$$=2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\}$$



ここで，$-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$$

すると，$\sin\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq2\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\sin\alpha-2\sin^2\alpha=-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，△ABC は正三角形となる。

［解 説］

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。

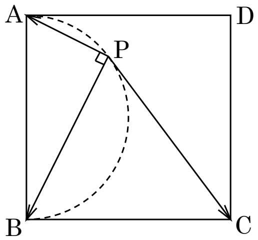
$\boxed{12}$　　　　［千葉大・理］

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$ をαを用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x, y の和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］



(1)　正方形ABCDの内部の点Pは，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たすので，

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$………①

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$………②

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$から，

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$より$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$となり，①②から，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$

$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2$………③

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$から$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$となり，①②から，

$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0$，$x-\alpha^2(y-1)=0$………④

さらに，直線PBに関して，点Aと点Cは反対側にあるので，$x<0$………⑤

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$y-1=\pm\dfrac{1}{\alpha}$，$x=\pm\alpha$　(複号同順)

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$となる。

ここで，$\alpha>0$から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$となり，

$x+y\leqq 1-2=-1$

等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$すなわち$\alpha=1$のときである。

以上より，$x+y$の最大値は-1であり，このとき，②から$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$となり，点Pは正方形ABCDの対角線の交点に位置する。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので，座標の設定という方法も考えられますが，ここでは①②を利用してx, yの連立方程式を立てるという方針で記しました。

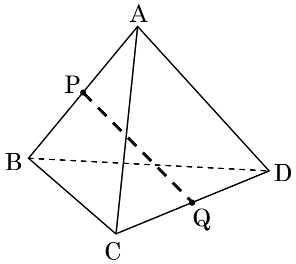
$\boxed{13}$ ［京都大］

四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

13　　　　［京都大］



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ より，$|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ より，$|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ となり，

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2$ となり，

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d} \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，点 P，点 Q は，それぞれ辺 AB，辺 CD の中点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$

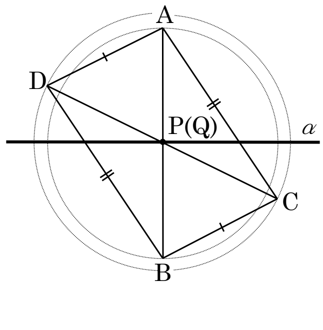
すると，③から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となるので，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$ である。

(2)　①③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ となり，

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d} \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)$

すると，④から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ となるので，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{CD}$ である。



これより，線分 PQ を軸として四面体 ABCD を 180° 回転すると，頂点 A は B，頂点 B は A，頂点 C は D，頂点 D は C に一致する。すなわち，四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって，線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき，線分 PQ を軸として，その一方を 180° 回転すると，もう一方に重なる。言い換えると，α によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。

［解 説］

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では，(1)と同様に考えると，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{CD}$ になることが推測できます。それを示した後，半直線 QP 上に視点をもってくると上図のようになり，回転対称という構図が見えてきます。

$\boxed{14}$ ［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

(1)　mod7 で記すと $2^3\equiv 1$ から，2^n を 7 で割った余り r は，k を 0 以上の整数として，

(i)　$n=3k+1$ のとき　$2^{3k+1}=(2^3)^k\cdot 2\equiv 1^k\cdot 2\equiv 2$ より，$r=2$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$2^{3k+2}=(2^3)^k\cdot 4\equiv 1^k\cdot 4\equiv 4$ より，$r=4$

(iii)　$n=3k+3$ のとき　$2^{3k+3}=(2^3)^{k+1}\equiv 1^{k+1}\equiv 1$ より，$r=1$

(2)　$m=101101101101101101_{(2)}$ を 10 進法で表し，mod7 で記すと，

$$m=1+2^2+2^3+2^5+2^6+2^8+2^9+2^{11}+2^{12}+2^{14}+2^{15}+2^{17}$$

$$\equiv 1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4=30\equiv 2$$

したがって，m を 7 で割った余りは 2 である。

［解　説］

基本的な整数問題です。いろいろな記述方法が考えられますが，解答例では合同式を用いました。

$\boxed{15}$ ［京都大］

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

15 ［京都大］

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して，

(i) $n\equiv 0$ のとき $n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii) $n\equiv 1$ のとき $n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii) $n\equiv 2$ のとき $n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0\,,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

［解 説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

$\boxed{16}$ ［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1) 整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ。

(2) n を奇数とする。このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$を満たす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ。

(3) c を実数とする。このとき 3 次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは1個以下であることを示せ。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，次の 3 つの場合に分けて調べる。

(i)　α，βがともに奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(ii)　αが偶数，βが奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$は偶数，β^2は奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(iii)　αが奇数，βが偶数のとき

α^2は奇数，$\alpha\beta$，β^2は偶数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(i)～(iii)より，いずれの場合も$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(2)　条件より，奇数nに対して，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ ………①

まず，(1)より，整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数となるので，①は成立しない。

これより，①を満たす整数α，βは，ともに偶数である。

しかし，α，βがともに偶数のとき，α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて 4 の倍数となり，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は 4 の倍数である。よって，①は成立しない。

以上より，①を満たす整数α，βは存在しない。

(3)　3 次方程式$x^3-2018x+c=0$（cは実数）の解を，$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$とおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より$\gamma=-(\alpha+\beta)$となり，③に代入すると，

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-2018,\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2018\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$2018=2\times1009$なので，(2)から④を満たす整数α，βは存在しない。

すなわち，α，β，γのうち整数となるのは 1 個以下である。

［解　説］

細かく誘導のついた整数問題です。方針に迷うことはないでしょう。

17 ［東北大・理］

整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

17 ［東北大・理］

(1) 整数a, bに対して，$3^a-2^b=1$……①より，$3^a=2^b+1$………②
すると，$3^a=2^b+1>1$となるので，$a\geqq 1$であり，このとき①より，

$$2^b=3^a-1\geqq 3^1-1=2$$

よって，$b\geqq 1$であり，a, bはともに正となる。

(2) $b>1$すなわち$b\geqq 2$のとき，2^bが 4 の倍数であることに着目して，以下，mod4 で記述すると，②の右辺は$2^b+1\equiv 1$である。

ここで，kを自然数としてaを偶奇に分け，$9\equiv 1$に注意すると，

(i) $a=2k$のとき　$3^a=3^{2k}=9^k\equiv 1^k\equiv 1$

(ii) $a=2k-1$のとき　$3^a=3^{2(k-1)+1}=9^{k-1}\cdot 3\equiv 1^{k-1}\cdot 3\equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，aが偶数のときである。

(3) (1)より，a, bはともに自然数なので，

(i) $b=1$のとき　②より$3^a=2^1+1=3$となり，$a=1$である。

(ii) $b\geqq 2$のとき　(2)より$a=2k$となり，②より，

$$3^{2k}=2^b+1,\ (3^k-1)(3^k+1)=2^b\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$(3^k+1)-(3^k-1)=2$であり，さらに2^bの約数が$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$であることに着目すると，③より，

$$3^k-1=2,\ 3^k+1=2^2$$

これより，$k=1$から$a=2$となり，また$2\cdot 2^2=2^b$から$b=3$である。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)$

［解 説］

整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

$\boxed{18}$ ［千葉大・文］

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］

(1)　初項 1，公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また，初項 3，公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から，

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2\ \cdots\cdots\text{①}$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2\ \cdots\cdots$②

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで，3 と 2 は互いに素なので，jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から，

$$n=2j+2,\ m=3j+2\ \cdots\cdots\text{③}$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと，③より，

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群，$c_3=31$から 4 項を第 3 群，…と呼ぶ。

$$1,\ 3\ \Big|\ \underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第1群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第2群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第3群}}\ \Big|\ \cdots\cdots$$

さて，d_{1000}が第 i 群に属するとすると，$2+4(i-1)<1000\leqq2+4i$から，$i=250$となり，第 250 群に属する。

さらに，$1000-(2+4\times249)=2$から，第 250 群の 2 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+4=(12\times250-5)+4=2999$$

また，d_{1001}は第 250 群の 3 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+6=(12\times250-5)+6=3001$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが，(2)はあまり見かけません。解答例では，$\{c_k\}$に注目し，群数列の考え方を利用して記しました。

19 ［東京大・理］

数列 a_1，a_2，$\cdots$ を，$a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

19　　［東京大・理］

(1)　$a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_n}{(n!)^2} = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$ に対して，$n \geqq 2$ のとき，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2 n!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)\cdot 2n}{n\cdot(n+1)n} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

ここで，n と $2n+1$ の最大公約数を g_1，i と j を自然数とすると，

$n = g_1 i$，$2n+1 = g_1 j$

すると，$1 = g_1(j-2i)$ となり $g_1 = 1$，すなわち n と $2n+1$ は互いに素である。

また，$n+1$ と $2n+1$ の最大公約数を g_2，k と l を自然数とすると，

$n+1 = g_2 k$，$2n+1 = g_2 l$

すると，$1 = g_2(2k-l)$ となり $g_2 = 1$，すなわち $n+1$ と $2n+1$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ が偶数であることより $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は自然数となり，また $\dfrac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので，既約分数を用いて $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{q_n}{p_n}$ と表したとき，

$p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，$q_n = 2n+1$

(2)　まず，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ とすると，$2(2n+1) < n(n+1)$ から，$n^2 - 3n - 2 > 0$

$n \geqq 2$ より $n > \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ となり，n は 4 以上の整数となる。

これより，$n \geqq 4$ のとき $a_n < a_{n-1}$ となり，$a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > 0$ であり，

$a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{P}_1}{(1!)^2} = 3$，$a_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{P}_2}{(2!)^2} = 5$，$a_3 = \dfrac{{}_7\mathrm{P}_3}{(3!)^2} = \dfrac{35}{6}$，$a_4 = \dfrac{{}_9\mathrm{P}_4}{(4!)^2} = \dfrac{21}{4}$

$a_5 = \dfrac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{(5!)^2} = \dfrac{77}{20}$，$a_6 = \dfrac{{}_{13}\mathrm{P}_6}{(6!)^2} = \dfrac{143}{60}$，$a_7 = \dfrac{{}_{15}\mathrm{P}_7}{(7!)^2} = \dfrac{143}{112}$

$a_8 = \dfrac{{}_{17}\mathrm{P}_8}{(8!)^2} = \dfrac{2413}{4032} < 1$

よって，$1 > a_8 > a_9 > \cdots > 0$ となるので，a_n が整数となるのは $n = 1,\ 2$ である。

［解 説］

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導の丁寧な類題が文系で出ており，それに引きずられた解法です。数値計算は少し面倒でした。漸化式を利用してもよかったのですが。

20　　［北海道大・文］

赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし, 自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$, $t=100B+10Y+R$, $u=100Y+10R+B$ で定める。

(1)　s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2)　$s>t>u$ となる確率を求めよ。

$\boxed{20}$　　［北海道大・文］

(1)　赤色，青色，黄色のサイコロを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし，自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

ここで，s が 500 以上になるのは，$R=5$, 6 で B, Y は任意より，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。同様に，t, u が 500 以上になるのも，確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

(i)　s, t, u がすべて 500 以上のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　s, t, u の 2 つが 500 以上となるとき　その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ である。

(i)(ii)より，s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率は，

$$\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$$

(2)　$s>t$ より $100R+10B+Y>100B+10Y+R$ となり，$11R>10B+Y$ ………①

すると，①を満たす R, B, Y の条件は，

(i)　$R>B$ のとき　任意の Y で①は成立する。

(ii)　$R=B$ のとき　①は $B>Y$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$R>B$ または $R=B>Y$ である。

同様に，$t>u$ より $100B+10Y+R>100Y+10R+B$ となり，

$$11B>10Y+R\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②を満たす R, B, Y の条件は，$B>Y$ または $B=Y>R$ である。

よって，$s>t>u$ となる R, B, Y の条件は，①かつ②から，

$$R>B>Y\ \cdots\cdots\cdots③,\quad R=B>Y\ \cdots\cdots\cdots④$$

以上より，③となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り，④となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20+15}{6^3}=\dfrac{35}{216}$ である。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)の①式については，初めは R の値で場合分けをしたのですが，規則性がみつかったため，それをまとめて記したのが上の解答例です。

$\boxed{21}$ ［千葉大・文］

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1) 確率 $P(4)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(6)$ を求めよ。

(3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

21　［千葉大・文］

(1)　もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき，金，銀，白である確率は，それぞれ $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n-2}{n}$ である。そして，金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，その合計点を考える。

さて，4 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，3 回目までの合計点が 50 点で，4 回目に金という場合だけである。すると，3 回目までは金が 1 回，白が 2 回となり，その確率 $P(4)$ は，

$$P(4)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^2\times\frac{1}{n}=\frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

(2)　6 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり，5 回目までは金 1 回，白 4 回または銀 5 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}+\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり，5 回目までは金 1 回，銀 4 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}=\frac{5}{n^6}$$

(i)(ii)より，求める確率 $P(6)$ は，$P(6)=\dfrac{5(n-2)^4+1}{n^6}+\dfrac{5}{n^6}=\dfrac{5(n-2)^4+6}{n^6}$

(3)　11 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり，10 回目までは金 1 回，白 9 回または銀 5 回，白 5 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^9\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_5\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり，10 回目までは金 1 回，銀 4 回，白 5 回または銀 9 回，白 1 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\,{}_9\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_9\Big(\frac{1}{n}\Big)^9\cdot\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

(i)(ii)より，求める確率 $P(11)$ は,

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$
$$=\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

［解 説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その 1 回手前の状態に着目しています。

22　　［東北大・理］

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

$\boxed{22}$ ［東北大・理］

(1) 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき, k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず, $X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から, その確率 $p(1)$ は, $p(1) = \dfrac{1}{n}$ である。

次に, $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \geqq n$ となるのは, $X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より, その確率 $p(n)$ は,

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{1}{n^{n-1}}$$

(2) $X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 \geqq n$ となるのは, $X_1 = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(2)$ は,

$$p(2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)\right\}$$
$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

(3) $n \geqq 3$ のとき, $X_1 + X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + X_3 \geqq n$ となるのは, $X_1 + X_2 = k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$, $(2,\ k-2)$, $\cdots$, $(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで, $X_3 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(3)$ は,

$$p(3) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k^2-1) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$$
$$= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)\right\} = \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

$\boxed{23}$ ［岡山大・理］

図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは，1, 3, 5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2, 6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

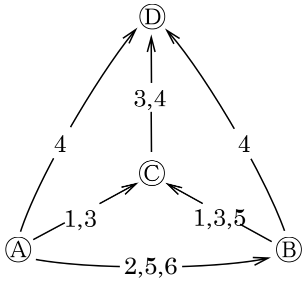


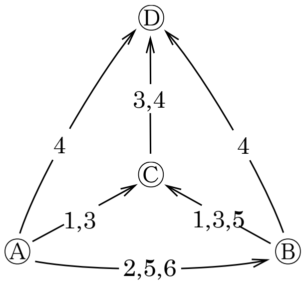
図1：経路の図

(1)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3)　ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。

$\boxed{23}$ ［岡山大・理］



(1) n 回の操作の後，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒにいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，条件より，$a_n=0\ (n\geqq 1)$ である。

また，$b_1=\dfrac{1}{2}$ のもとで，条件より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n=b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $c_1=\dfrac{1}{3}$ のもとで，条件より，

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}c_n$ ………②

ここで，②を満たす１つの数列を，α を定数として，$c_n=\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\alpha$ から $\alpha=-\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②－③より，$c_{n+1}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}=\dfrac{2}{3}\left\{c_n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

$$c_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left\{c_1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n=\dfrac{13}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率を P_n とおくと，

(i) $n=1$ のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1=\dfrac{1}{6}$

(ii) $n\geqq 2$ のとき　$a_n=0$ から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$P_m=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\left\{\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{24}$ ［九州大・理］

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

24　　［九州大・理］

１から４までの４枚のカードが入っている箱から１枚カードを取り出し，もとに戻す試行を行う。このとき，k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を４で割った余りが $0, 1, 2, 3$ である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。

さて，$(X_1X_2\cdots X_n)\times X_{n+1}=(X_1X_2\cdots X_nX_{n+1})$ であるが，この式の両辺について４で割った余りの関係を調べるために，mod 4 ですべてのパターンを記述すると，右表のようになる。

$0\times1\equiv0$	$0\times2\equiv0$	$0\times3\equiv0$	$0\times4\equiv0$
$1\times1\equiv1$	$1\times2\equiv2$	$1\times3\equiv3$	$1\times4\equiv0$
$2\times1\equiv2$	$2\times2\equiv0$	$2\times3\equiv2$	$2\times4\equiv0$
$3\times1\equiv3$	$3\times2\equiv2$	$3\times3\equiv1$	$3\times4\equiv0$

そこで，この表をもとに $X_1X_2\cdots X_n$ を４で割った余りの確率について漸化式を作ると，$p_1=q_1=r_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots③,\ \ s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$n\geqq2$ で $q_n=s_n$ となり，$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ から $q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑤$

②⑤から，$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n$ となり，

$$q_n=q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\ \ s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

③に代入すると，$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ となり，$2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\dfrac{1}{2}$ から，

$$2^nr_n=2r_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n,\ \ r_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

さらに，$p_n=1-q_n-r_n-s_n$ から，

$$p_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば，その処理は難しくありません。なお，p_n は①を解いても求まりますが，(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。

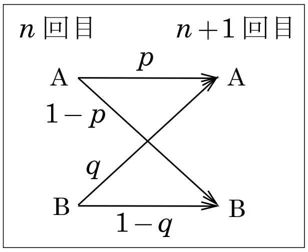
$\boxed{25}$ ［大阪大・理］

p, q を $0<p<1$, $0<q<1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする。

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

$\boxed{25}$　　［大阪大・理］



(1)　n 試合目に A が勝つ確率を a_n とすると，引き分けがないことより，B が勝つ確率は $1-a_n$ となる。

また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であることより，

$$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=(p-q)a_n+q$$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p+q}=(p-q)\Big(a_n-\dfrac{q}{1-p+q}\Big)$ となり，$a_1=p$ から，

$$a_n-\frac{q}{1-p+q}=\Big(a_1-\frac{q}{1-p+q}\Big)(p-q)^{n-1}=\Big(p-\frac{q}{1-p+q}\Big)(p-q)^{n-1}$$

$$=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}=\frac{1-p}{1-p+q}(p-q)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{1-p+q}\{(1-p)(p-q)^n+q\}$ である。

(2)　$n\geqq 3$ として，n 回試合を行うとき，B が連勝せずに k 回目と l 回目 $(k<l)$ に勝つとする。このとき勝つチームを並べて示すと，

(i)　$k=1$ かつ $l=n$ のとき　B→A→A→A→A→……→A→A→B

A→B が 1 回，B→A が 1 回，A→A が $n-3$ 回より，その確率は，

$$(1-p)\times(1-p)qp^{n-3}=p^{n-3}(1-p)^2q$$

(ii)　$2\leqq k\leqq n-2$ かつ $l=n$ のとき　A→B→A→A→A→……→A→A→B など

A→B が 2 回，B→A が 1 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)^2qp^{n-4}=(n-3)p^{n-3}(1-p)^2q$$

(iii)　$k=1$ かつ $3\leqq l\leqq n-1$ のとき　B→A→B→A→A→……→A→A→A など

A→B が 1 回，B→A が 2 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$(1-p)\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)q^2p^{n-4}=(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(iv)　$2\leqq k<k+1<l\leqq n-1$ のとき　A→B→A→B→A→……→A→A→A など

A→B が 2 回，B→A が 2 回，A→A が $n-5$ 回で，$(k,\ l)$ の決め方が ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので，その確率は，$n\geqq 5$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2(1-p)^2q^2p^{n-5}=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(i)～(iv)より，B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n は，

$$b_n=\{1+(n-3)\}p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-3)\{2+(n-4)\}p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

$$=(n-2)p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

$$=\frac{1}{2}(n-2)p^{n-4}(1-p)^2q\{2p+(n-3)q\}\quad(n=3,\ 4\ のときも成立)$$

［解 説］

(1)は確率と漸化式という頻出題，(2)は数え上げるタイプの確率問題でミスに要注意です。そのため，(2)では n に具体的な数値を代入して，チェックしながら計算を進めていくのが，1 つの有効な方法となります。