13 ［広島大・理］

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3) 座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。

$\boxed{14}$ ［東京大・文］

座標平面上に放物線 C を $y = x^2 - 3x + 4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2 - 3x + 4$ で定める。原点を通る 2 直線 l，m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px + qy \leqq 0$ が成り立つ。

$\boxed{15}$ ［東北大・理］

xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$，$D : y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{16}$ ［信州大・医］

θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{17}$　　［東京大・文］

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

(1)　点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

13 ［広島大・理］

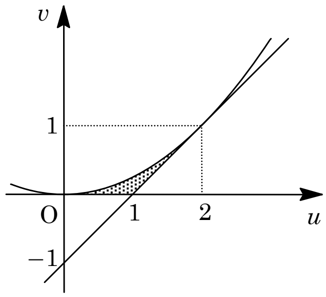
(1) まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$-\dfrac{u^2}{4}+v\leqq 0$ ………①，$0\leqq \dfrac{u}{2}\leqq 1$ ………②

$f(0)=v\geqq 0$ ………③

$f(1)=1-u+v\geqq 0$ ………④



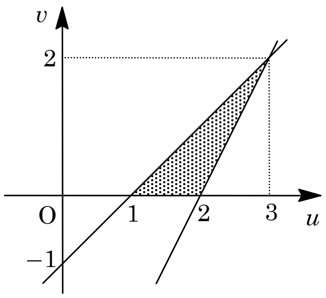
①③から $0\leqq v\leqq \dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2) 条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$f(0)=v\geqq 0$ ………⑤

$f(1)=1-u+v\leqq 0$ ………⑥

$f(2)=4-2u+v\geqq 0$ ………⑦

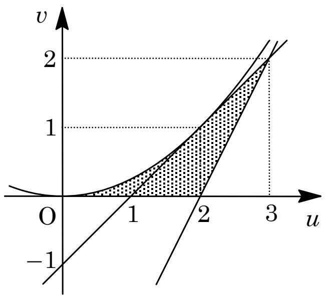


⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3) 点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，$x,\ y$ の条件は $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，解と係数の関係から，

$x+y=u$，$xy=v$



これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，

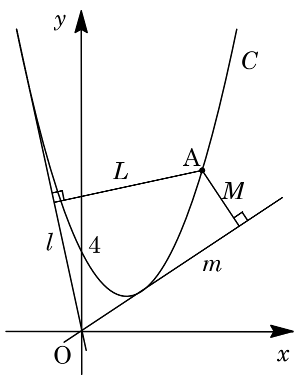
$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\left[\,u^3\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

［解 説］

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

14　　［東京大・文］

(1)　$C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。



①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0\,,\ a+3=\pm4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$，$m: y=x$ とおく。

ここで，C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し，A と $l,\ m$ の距離をそれぞれ $L,\ M$ とすると，

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt2}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt2}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt2}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt2}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt5\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt5\sqrt[4]{2}}(|t+2|+\sqrt5|t-2|)$$

ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt5|t-2|$ とおくと，

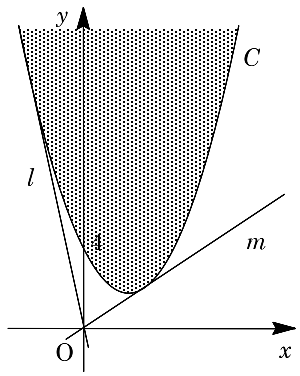
(i)　$t\geqq2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt5(t-2)=(1+\sqrt5)t+2-2\sqrt5$

(ii)　$-2\leqq t<2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt5(t-2)=(1-\sqrt5)t+2+2\sqrt5$

(iii)　$t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt5(t-2)=(-1-\sqrt5)t-2+2\sqrt5$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

(2)　領域 $D: y\geqq x^2-3x+4$ は右図の網点部のようになる。



そこで，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq0$ ……③が成り立つ条件は，

(a)　$q=0$ のとき　③は $px\leqq0$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$p=0$ である。

(b)　$q>0$ のとき　③は $y\leqq-\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する場合はない。

(c)　$q<0$ のとき　③は $y\geqq-\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$l,\ m$ の傾きから，

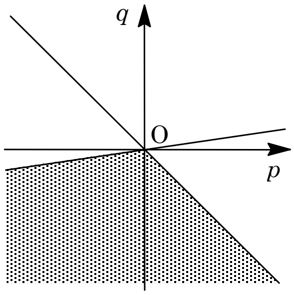
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1,\ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$ かつ $q \leqq -p$ である。

以上より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲は，

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{ かつ } q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

$\boxed{15}$ ［東北大・理］

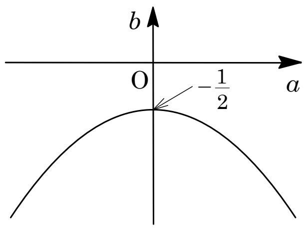
(1)　$C: y=(x-a)^2+b$ ……①，$D: y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2\,,\ \ 2x^2-2ax+a^2+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1\,,\ \ -a^2-2b=1$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2)　(1)のとき，C と D の 2 交点をを結ぶ直線は，①＋②より，

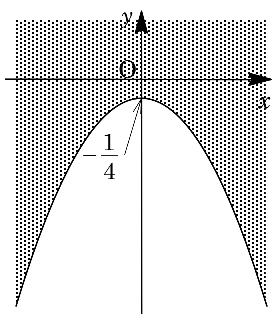
$$2y=(x-a)^2+b-x^2\,,\ \ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで，直線⑤が点 $(x,\ y)$ を通過する条件は，⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき，⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので，

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると，$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり，図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また，通過領域は実数解条件で処理しています。

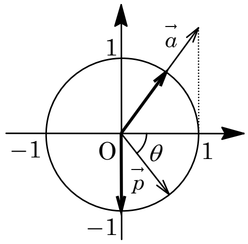
$\boxed{16}$　　　　［信州大・医］

直線$l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi$$（φは$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角）………(＊)

さて，θが$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を動くとき，(＊)の$y$のとりうる値の範囲を考えると，

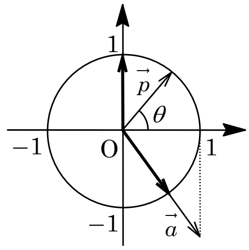
(i)　$x\geqq 0$のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$
$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(ii)　$x<0$のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$
$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$である。

［解 説］

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは$\cos\theta$と$\sin\theta$のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2p,\ 2p^2)$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x=2p$，$y=2p^2$ から，

$$y=2\Big(\frac{x}{2}\Big)^2,\ \ y=\frac{1}{2}x^2\ (-2\leqq x\leqq 2)$$

したがって，点 Q の軌跡は，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の $-2\leqq x\leqq 2$ の部分である。

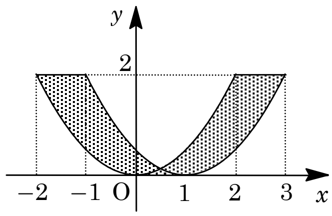
(2)　線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0\leqq r\leqq 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで，点 R を固定すると，(1)から，点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}(x-r)^2\quad (r-2\leqq x\leqq r+2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，点 R を $0\leqq r\leqq 1$ で動かすと，$(*)$で表される放物線の一部は，x 軸方向に平行移動する。



これより点 S が動く領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

この領域の面積を S とおくと，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ についての対称性から，

$$S=2\Big\{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}x^2dx+1\cdot 2-\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-1)^2dx\Big\}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dx+4-\int_{1}^{3}(x-1)^2dx=\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}+4-\Big[\frac{(x-1)^3}{3}\Big]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8}+4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{95}{24}$$

［解 説］

軌跡を求める問題です。(2)は，東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。