1　　　　［熊本大］

$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

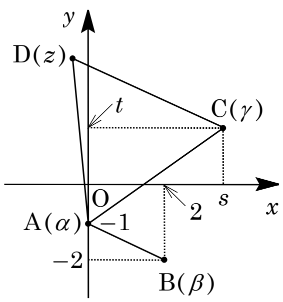
(1) z を s, t を用いて表せ。

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle \mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

1　　　　［熊本大］

(1)　$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti\ (s>0,\ t>0)$ に対し，複素数平面上に $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。



ここで，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$ は $\mathrm{C}(\gamma)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$ となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$ となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3)　まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})=5$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

［解　説］

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

$\boxed{2}$ ［東北大］

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，(＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

２　［東北大］

(1)　$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(＊)と(＊＊)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2)　γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z} \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i)　$\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii)　$\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(＊)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}\,|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1,\ k_2\ (k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}},\ \dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ である。

［解　説］

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

$\boxed{3}$ ［京都大］

w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し，$|w|=R\ (R>1)$ のとき，θ を任意の実数として，

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり，

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$，④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので，

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑤で表される楕円である。

(2)　$\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，r を正の実数として，

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると，①⑥より，$x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり，

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，⑨⑩より，

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，$r>0$ から，$r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$，また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ で，⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$，⑧から y は任意の値をとる。

以上より，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x\geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

［解　説］

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1)　αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線をLとする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$ ［東京大］

(1)　条件より，$z\neq 0$ のとき $w=\dfrac{1}{z}$ から，$z=\dfrac{1}{w}\ (w\neq 0)$………①

さて，点 z が点 $\alpha\ (\alpha\neq 0)$ と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき，

$$|z|=|z-\alpha|\text{………②}$$

①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{|1-\alpha w|}{|w|}$ となり，

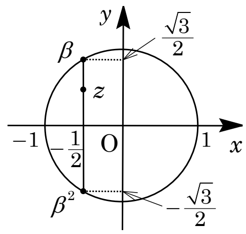
$$|1-\alpha w|=1,\ |-\alpha|\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=1,\ \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし，$w\neq 0$ より，原点は除く。

(2)　$x^3=1$ の解は，$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より，$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

すると，条件より，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となる。

ここで，点 β と点 β^2 を結ぶ直線は，(1)で $\alpha=-1$ として表すことができるので，点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき，



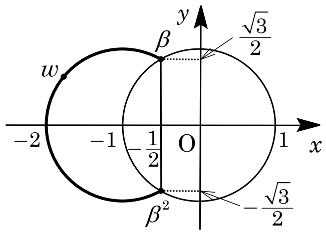
$$|z|=|z+1|\text{………③},\ |z|\leqq 1\text{………④}$$

①③より，$|w+1|=1\ (w\neq 0)$………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right|\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{|w|}\leqq 1$ から，$|w|\geqq 1$………⑥

⑤⑥より，点 w の軌跡は，点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点 β，β^2 は含む。



［解　説］

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

$\boxed{5}$ ［北海道大］

複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし, O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を, それぞれ α, β, z とするとき, $\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

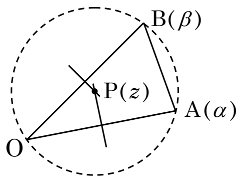
(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め, 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

5　　　　［北海道大］

(1)　原点 O, 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ を頂点とする△OAB について,

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta \cdots\cdots\cdots ①$$



このとき, 点 $P(z)$ は△OAB の外心なので, 辺 OA および辺 OB の垂直二等分線の交点となり,

$$|z| = |z-\alpha| \cdots\cdots\cdots ②,\ |z| = |z-\beta| \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $z = \alpha\beta$ を②に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha|$ となり, ①から $|\alpha| \neq 0$ より,

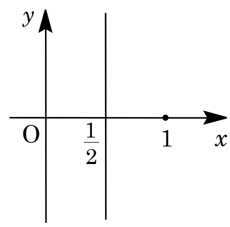
$$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1|,\ |\beta| = |\beta - 1| \cdots\cdots\cdots ④$$

同様に, $z = \alpha\beta$ を③に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta|$ となり, ①から $|\beta| \neq 0$ より,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha - 1||\beta|,\ |\alpha| = |\alpha - 1| \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④⑤より, 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ は, ともに原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, ①から $\alpha \neq \beta$ である。

以上より, α の満たすべき条件は $|\alpha| = |\alpha - 1|$ であり, 点 $A(\alpha)$ の描く図形は右図の直線である。



(2)　(1)より, $\alpha = \dfrac{1}{2} + ai$, $\beta = \dfrac{1}{2} + bi$　$(a \neq b)$ とおくことができ,

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right) = \left(\frac{1}{4} - ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i$$

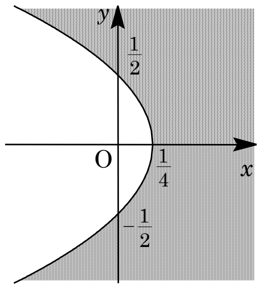
ここで, $z = x + yi$ とおくと, $x = \dfrac{1}{4} - ab$, $y = \dfrac{1}{2}(a+b)$ となり,

$$a + b = 2y \cdots\cdots\cdots ⑥,\ ab = \frac{1}{4} - x \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より, a, b $(a \neq b)$ は, t についての 2 次方程式 $t^2 - 2yt + \left(\dfrac{1}{4} - x\right) = 0$ の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4 = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0,\ y^2 > -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

よって, 点 $P(z)$ の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



［解　説］

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で, $\alpha + \overline{\alpha} = 1$ を結論としてもよいでしょう。なお, O, A, B が一直線上にないということについては, (1)の結果から満たしていることがわかります。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

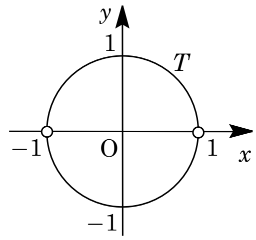
実数 $a,\ b,\ c$ に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点 $1,\ -1$ を除いたものを T とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{6}$ ［東京工大］



(1) $f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は, 2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。

そこで，解を $x=\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2) $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ ($a,\ b$ は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は, (1)(2)から,

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\cdots①,\quad c_1c_2+2=b\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0\cdots\cdots③$の 2 つの解となる。

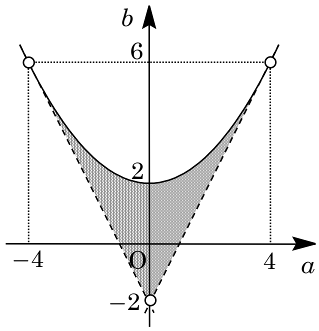
ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は，

$$-\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0\cdots\cdots④,\quad -2<\frac{a}{2}<2\cdots\cdots⑤,\quad g(-2)=2+2a+b>0\cdots\cdots⑥$$
$$g(2)=2-2a+b>0\cdots\cdots⑦$$

④～⑦をまとめると，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$$b>-2a-2,\quad b>2a-2$$

点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



［解 説］

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。

$\boxed{7}$ ［千葉大］

数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\ \ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_5を求めよ。

(2)　a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3)　無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。

7　　　　［千葉大］

(1)　$a_1=2$ で，$b_n=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくと，$a_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$ ……①となり，

$$b_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=1+\frac{1}{b_1}=1+2=3$$

$$b_2=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6},\ a_3=1+\frac{1}{b_2}=1+6=7$$

$$b_3=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{42},\ a_4=1+\frac{1}{b_3}=1+42=43$$

$$b_4=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\right)=\frac{1}{1806},\ a_5=1+\frac{1}{b_4}=1+1806=1807$$

(2)　①より，$a_{n+1}-1=\frac{1}{b_n}$ から $a_{n+1}\neq 1$ で，しかも $a_1\neq 1$ なので，$a_n\neq 1$ である。

これより，$b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}$ ……②となり，$n\geqq 2$ で $b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}$ ……③である。

すると，②－③から，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$ となり，

$$-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1},\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ………④

$n=1$ のときは，$a_2-1=3-1=2$，$a_1(a_1-1)=2\cdot 1=2$ となり，このときも④は成立しているので，$n\geqq 1$ で，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1 \text{ ………⑤}$$

(3)　⑤から，$a_{n+1}-a_n=a_n{}^2-2a_n+1=(a_n-1)^2>0$ となり，$a_n\geqq a_1=2$ なので，

$$a_{n+1}\geqq a_n(2-1)+1=a_n+1$$

すると，$a_n\geqq 2+(n-1)=n+1$ から，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となる。

さて，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-b_n$ なので，②から，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。与えられた漸化式は扱いにくそうですが，誘導に従えばそれほどではありません。

8 ［神戸大］

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\log\frac{e+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=(-1)^0\int_0^1 e^0\,dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{e^{-kx}}{-k}\Big]_0^1=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}\end{aligned}$$

②より，$\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-\log\frac{e+1}{2}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2}-1=\log\frac{e+1}{2e}$$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$1+e^{-x}\geqq 1$ より，

$$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx=\Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

すると，$\displaystyle\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ から，$n\to\infty$ のとき，

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|\to 0,\ (-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\to 0$$

ここで，(2)から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ なので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2e}$$

［解　説］

定積分と無限級数の融合問題です。細かく誘導がつけられているので，方針に迷うことはないでしょう。

9 ［筑波大］

xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\ \ ]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[筑波大]

(1)　点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上の格子点の座標を$(n,\ l)$とおくと，

$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$より，その個数は$\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$である。

(2)　直線$y=x$, x軸，$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$A(N)$は,

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)(0\leqq x\leqq N)$，$x$軸，直線$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$B(N)$は,

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて，一般的に，$[a]\leqq a<[a]+1$から，$a-1<[a]\leqq a$となり，

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より，$1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$となり，①から,

$$\frac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}=\frac{4}{\pi}$となる。

［解 説］

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。

$\boxed{10}$ ［熊本大］

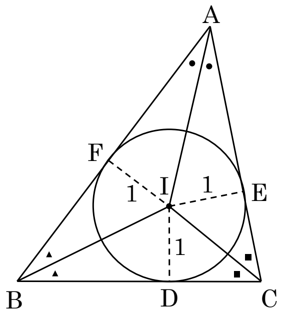
半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの $x,\ y$ を求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　△ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ から，



$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\quad \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$

そこで，△ABC の内心を I，その面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\Big)\cdot 1\\&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\end{aligned}$$

(2)　$z=\frac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\frac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$\begin{aligned}S'&=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\\&=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$3\sqrt{3}$	↗	

すると，S の増減は右表のようになり，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。このとき，$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\frac{\pi}{6}$ であり，$y=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ となる。

［解 説］

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが，結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

11 ［千葉大］

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

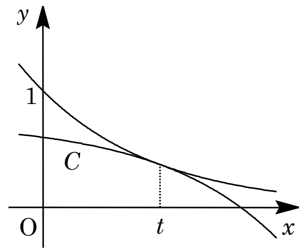
(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

$\boxed{11}$　　　　［千葉大］

(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,

$$y=-e^{x-a}+b\ \cdots\cdots\cdots①$$



また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}\ \cdots\cdots②$ と $x=t\ (t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$$-e^{t-a}=-e^{-t}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$-e^{t-a}+b=e^{-t}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(2)　C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t,\quad x=t+\log 2$$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})\,dx=\left[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\right]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$$f'(t)=1-e^{-t}$$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ 1 つ存在する。

この α を用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。

すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ 1 つ存在する。

［解　説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので, 混乱しないように注意が必要です。

12　　［神戸大］

n を自然数とする。$f(x)=\sin x - nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3)　(2)における解を x_n とする。$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ であることを示し，$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ。

$\boxed{12}$ ［神戸大］

(1) n を自然数とし，$f(x)=\sin x-nx^2+\frac{1}{9}x^3$ に対して，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，

$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2,\ f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x,\ f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{3}$$

すると，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$ となる $\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f''(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$f''(0)=-2n<0$ であり，

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2n+\frac{\pi}{3}\leqq-1-2+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(-9+\pi)<0$$

よって，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ である。

(2) (1)より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $f'(x)$ は単調減少となり，

$$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+\frac{\pi^2}{12}\leqq-\pi+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{12}(-12+\pi)<0$$

すると，$f'(\beta)=0$ となる $\beta\ \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで，$f(0)=0$ から $f(\beta)>0$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}\leqq1-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}=-\frac{1}{72}\{\pi^2(18-\pi)-72\}<0$$

すると，$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(3) $f(x_n)=0\ \left(0<x_n<\frac{\pi}{2}\right)$ より，$\sin x_n-nx_n{}^2+\frac{1}{9}x_n{}^3=0$ となり，

$$nx_n{}^2=\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3,\ x_n{}^2=\frac{\sin x_n}{n}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x_n{}^3}{n}$$

ここで，$0<\sin x_n<1$，$0<x_n{}^3<\frac{\pi^3}{8}$ より，$n\to\infty$ のとき $\frac{\sin x_n}{n}\to0$，$\frac{x_n{}^3}{n}\to0$

よって，$\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0$ から $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

また，$nx_n=\frac{\sin x_n}{x_n}+\frac{1}{9}x_n{}^2$ となり，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1+\frac{1}{9}\cdot0=1$$

［解 説］

微分と増減に極限が融合した典型題です。なお，スペースの関係上，$3<\pi<4$ を利用した部分については省いています。

$\boxed{13}$ ［東北大］

a, b, c を実数とし,

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし, $a\neq 0$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$

13 ［東北大］

(1) $(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\Big\{e^{\frac{\pi}{2}a}\Big(a\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\Big) - a\Big\}$$

(2) $J(a,\ b,\ c) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\}dx$

$$= -\frac{1}{2}I(a,\ b+c) + \frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3) $F(t) = 8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx)dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx\sin 6tx - \sin 4tx\sin 2tx - \sin 2tx\sin 6tx + \sin^2 2tx)dx$$

$$= 2J(1,\ 6t,\ 4t) - 2J(1,\ 4t,\ 2t) - 2J(1,\ 6t,\ 2t) + 2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 2t) + I(1,\ 6t) - I(1,\ 2t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 4t)$$

$$- I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

さて，$I(1,\ b) = \dfrac{1}{1+b^2}\Big\{e^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos\dfrac{\pi}{2}b + b\sin\dfrac{\pi}{2}b\Big) - 1\Big\}$ となるので，

$$|I(1,\ b)| \leqq \frac{1}{1+b^2}\Big\{e^{\frac{\pi}{2}}\Big|\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\Big| + |-1|\Big\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\Big(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2} + 1\Big)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ なので，k が自然数のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt) = 0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

［解 説］

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

14 ［東京医歯大］

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)\,dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)\,dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。

14　　［東京医歯大］

(1)　$F'(t)=f(t)$ とおくと，$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ となり，

$$\int_0^x\Big\{\int_0^u f(t)dt\Big\}du=\int_0^x\{F(u)-F(0)\}du=\int_0^x F(u)du-F(0)x$$

$$\int_x^1\Big\{\int_u^1 f(t)dt\Big\}du=\int_x^1\{F(1)-F(u)\}du=F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du$$

すると，与えられた条件式は，

$$F(x)-F(0)=4ax^3+(1-3a)x$$
$$+\int_0^x F(u)du-F(0)x+F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると，

$$F'(x)=12ax^2+(1-3a)+F(x)-F(0)-F(1)+F(x)$$
$$f(x)=12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①に $x=0$ を代入すると，$\displaystyle 0=F(1)-\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots③$

①に $x=1$ を代入すると，$\displaystyle F(1)-F(0)=4a+1-3a+\int_0^1 F(u)du-F(0)$ より，

$$F(1)=a+1+\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$a+1=0$ となり，$a=-1$ である。

すると，②から，$f(x)=-12x^2+4+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に $x=0$，$x=1$ を代入すると，

$$f(0)=4+F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑥,\quad f(1)=-8+F(1)-F(0)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$f(0)+f(1)=4-8=-4\cdots\cdots⑧$である。

(2)　⑤の両辺を x で微分すると，$f'(x)=-24x+2F'(x)=-24x+2f(x)\cdots\cdots\cdots⑨$

ここで，$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，⑨から，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{-24x+2f(x)\}$$
$$=-24xe^{-2x}$$

(3)　(2)より，$\displaystyle g(x)=-24\int xe^{-2x}dx$ となり，C を定数として，

$$g(x)=12xe^{-2x}-12\int e^{-2x}dx=12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C=6(2x+1)e^{-2x}+C$$

すると，$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，$f(x)=6(2x+1)+Ce^{2x}$ となり，⑧から，

$$(6+C)+(18+Ce^2)=-4,\quad C=-\frac{28}{1+e^2}$$

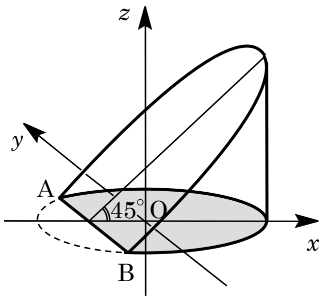
以上より，$\displaystyle f(x)=6(2x+1)-\frac{28}{1+e^2}e^{2x}$ である。

［解 説］

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが，誘導がていねいなので，方針に迷うことはないでしょう。

$\boxed{15}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

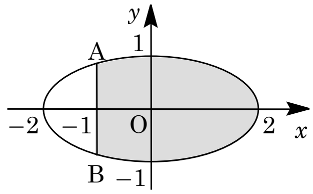
(2)　立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

$\boxed{15}$ ［広島大］

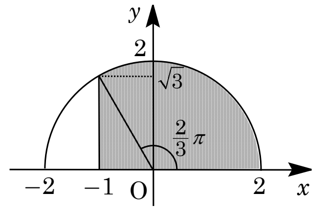
(1) 楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に対して,

$$y = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \cdots\cdots\cdots(*)$$



さて, C に囲まれる図形の $x \geqq -1$ の部分の面積を U とすると, x 軸に関する対称性より,

$$U = 2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

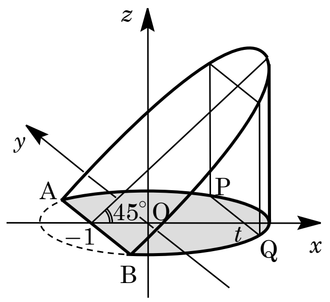


そして, U の値は右図の網点部の面積が対応し,

$$U = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $(*)$に $x = t$ を代入すると, $y = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり, C と直線 $x = t$ の交点を P, Q とおくと,

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{4-t^2}$$



これより, 立体 V を平面 $x = t$ で切ったとき, 断面の長方形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t) = \mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45^\circ = (t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3) 立体 V の体積 W は, (1)の結果も利用して,

$$W = \int_{-1}^{2} S(t)\,dt = \int_{-1}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt + \int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで, $4-t^2 = u$ とおくと, $-2tdt = du$ から,

$$\int_{-1}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt = \int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = \frac{1}{2}\int_{0}^{3} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^3 = \sqrt{3}$$

よって, $W = \sqrt{3} + \dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

［解 説］

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため, 見通しはかなりよくなっています。

$\boxed{16}$　　　　［岡山大］

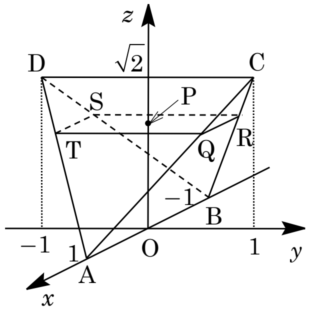
座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

16　　［岡山大］

(1) 座標空間内の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体ABCD に対して，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より，辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として，

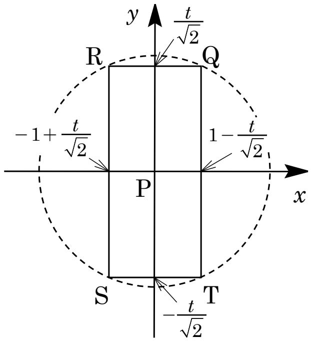


$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで，点 $P(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は，$\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり，$(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって，交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を，それぞれ R, S, T とおくと，(1)と同様にして，$\overrightarrow{AD}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から $T\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



また，点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより，

$$R\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ S\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより，平面 $z=t$ 上で，四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり，この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi PQ^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると，四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\Big[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

［解　説］

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが，それ以外に，対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

$\boxed{17}$ ［大阪大］

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

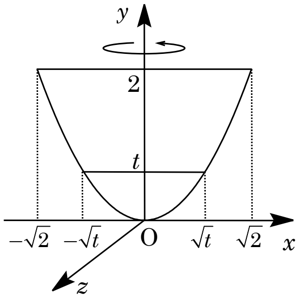
(1)　t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2)　M の体積 V を求めよ。

17　　［大阪大］

(1)　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点 $(0,\ t,\ 0)$ で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，

$$x^2+z^2\leqq t,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots①$$



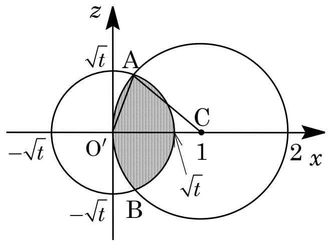
また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t,\ (x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t$$

この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$ とし，2 円の交点を A, B とおく。すると，交点 A, B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，



$$2x-1=t-1,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t},\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\right\}$$
$$=t\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta$$
$$=2\theta(1+\cos 2\theta)+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2)　M の体積 V とすると，$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos 2\theta-4\sin 2\theta+4\pi)(\sin 2\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin 4\theta\, d\theta = -\big[\,\theta\cos 4\theta\,\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\theta\, d\theta = -\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3}{4}\pi$$

以上より，$V = -\dfrac{3}{4}\pi - 2\cdot\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}\pi$ となる。

［解 説］

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。

$\boxed{18}$ ［東京大］

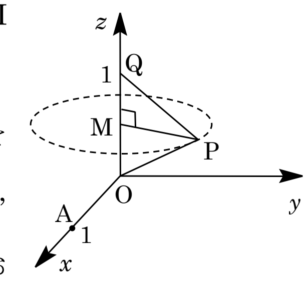
点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

18 ［東京大］

(1) 原点 O, 点 Q$(0,\ 0,\ 1)$ に対して, 線分 OQ の中点を M とすると, $\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ となる。



さて, 座標空間内で, 1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき, $\mathrm{PM}\perp\mathrm{OQ}$, $\mathrm{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より, 点 P の座標は, φ を $0^\circ \leqq \varphi < 360^\circ$ として, $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \frac{1}{2}\right)$ とおくことができる。すると, 点 P の x 座標がとりうる値の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また, 点 A$(1,\ 0,\ 0)$ に対して, $\angle\mathrm{AOP}=\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = 1\cdot 1\cdot\cos\theta$$

よって, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$ となり, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$ である。

(2) (1)から, Q$(0,\ 0,\ 1)$ のとき, 辺 OP が通過してできる図形は, 頂点が原点で, 中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして, 点 Q が平面 $x=0$ 上を動く, すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき, 辺 OP が通過してできる図形 K は, 円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて, 円錐側面 C 上の任意の点を X$(x,\ y,\ z)$ とおくと, $\angle\mathrm{QOX}=\frac{\pi}{3}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\ z=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

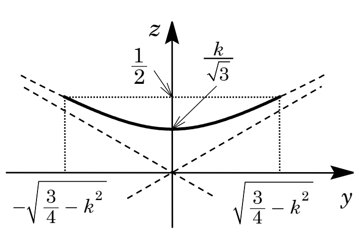
$0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ から, 両辺を 2 乗すると, $4z^2=x^2+y^2+z^2$ となり,

$$3z^2=x^2+y^2\quad\left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, 円錐側面 C を, x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし, (1)から, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

すると, $(*)$から, $3z^2=k^2+y^2$ となり,

$$y^2-3z^2=-k^2\quad\left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)$$



$k\neq 0$ のときは双曲線の一部となり, 平面 $x=k$ 上に図示すると, 右図の太線部のようになる。

さらに, この双曲線（太線部）を点$(k,\ 0,\ 0)$ のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R, 内径を r, 面積を $S(k)$ とおくと,

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-k^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-k^2}\,,\ \ r=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(1-k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k=0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[\,k-\frac{4}{9}k^3\,\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解　説］

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。