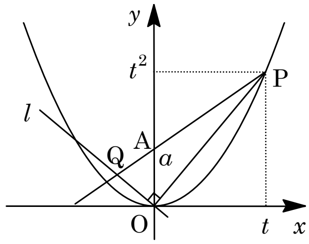
$\boxed{3}$　　［金沢大］

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2)　t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。

３　　　　［金沢大］



(1)　$P(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は,

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

$A(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は,

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より,

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\ \ y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $Q(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2)　点 $Q(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより, (1)から,

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から,

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑥$

すると，$v\neq 0$ から $t=-\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から,

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ \ 3u^2+v^2=2v,\ \ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\frac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq u<0$ となり，また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

［解　説］

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。