

17

[一橋大]

連立方程式 $x^2 = yz + 7$, $y^2 = zx + 7$, $z^2 = xy + 7$ を満たす整数の組 (x, y, z) で $x \leq y \leq z$ となるものを求めよ。

18

[北海道大・理]

自然数の2乗となる数を平方数という。

- (1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき, $a \geq k^2 + 2k - 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

19

[九州大・文]

以下の問いに答えよ。

- (1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。
- (2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。
- (3) 225 との最大公約数が 15 であり、かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

20

[筑波大・理]

数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 3$ 、 $a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとする。また、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。
- (2) b_n ($n = 1, 2, \dots$) の一の位の数 が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (3) a_{2017} の一の位の数 を求めよ。

21

[東京大]

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

22

[九州大・理]

初項 $a_1 = 1$ ，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち， 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。
- (3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

23

[名古屋大・文]

次の問いに答えよ。

- (1) 次の条件(*)を満たす3つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

- (2) 偶数 $2n$ ($n \geq 1$)の3つの正の約数 p, q, r で、 $p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする。ただし、条件を満たす組が存在しない場合は、 $f(n) = 0$ とする。 n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また、 $f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。

17

[一橋大]

連立方程式 $x^2 = yz + 7 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y^2 = zx + 7 \cdots \cdots \textcircled{2}$, $z^2 = xy + 7 \cdots \cdots \textcircled{3}$ に対して,

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } x^2 - y^2 = z(y - x), (x - y)(x + y + z) = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{より, } y^2 - z^2 = x(z - y), (y - z)(x + y + z) = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

(i) $x + y + z \neq 0$ のとき

④⑤より $x = y = z$ となり, ①に代入すると $x^2 = x^2 + 7$ となり, 成立しない。

(ii) $x + y + z = 0$ のとき

④⑤は満たされ, $y = -(x + z)$ として①に代入すると, $x^2 = -(x + z)z + 7$ となり,

$$x^2 + zx + z^2 - 7 = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

ここで, x は実数より, $D = z^2 - 4(z^2 - 7) \geq 0$ となり,

$$3z^2 - 28 \leq 0, z^2 \leq \frac{28}{3} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

さて, 整数 x, y, z は, $x + y + z = 0$ かつ $x \leq y \leq z$ より, $x \leq 0, 0 \leq z \cdots \cdots \textcircled{8}$

⑦⑧より, $z = 0, 1, 2, 3$ となる。

(ii-i) $z = 0$ のとき ⑥より $x^2 = 7$ となり, x が整数というのに反する。

(ii-ii) $z = 1$ のとき ⑥より $x^2 + x - 6 = 0$ となり, $(x + 3)(x - 2) = 0$

⑧から $x = -3, y = -(-3 + 1) = 2$ となるが, $x \leq y \leq z$ に反する。

(ii-iii) $z = 2$ のとき ⑥より $x^2 + 2x - 3 = 0$ となり, $(x + 3)(x - 1) = 0$

⑧から $x = -3, y = -(-3 + 2) = 1$ となり, $x \leq y \leq z$ を満たす。

(ii-iv) $z = 3$ のとき ⑥より $x^2 + 3x + 2 = 0$ となり, $(x + 2)(x + 1) = 0$

⑧から $x = -2, -1$ となる。

$x = -2$ のとき, $y = -(-2 + 3) = -1$ となり, $x \leq y \leq z$ を満たす。

$x = -1$ のとき, $y = -(-1 + 3) = -2$ となり, $x \leq y \leq z$ に反する。

(i)(ii)より, $(x, y, z) = (-3, 1, 2), (-2, -1, 3)$

[解説]

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では, ⑧の条件に着目して, まず y を消去し, 0 以上である z の値から求めています。

18

[北海道大・理]

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき,

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで, $n \geq 1, 2k-1 \geq 1$ より, $(2k-1)n \geq 2k-1$ となり,

$$a \geq k^2+2k-1 \text{ ……②}$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき, $n(n+1)+14 > n^2$ より, ①から,

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \quad (k \text{ は自然数}) \text{ ……③}$$

すると, ②から, $14 \geq k^2+2k-1$ となり, $k^2+2k-15 \leq 0$

$$(k+5)(k-3) \leq 0, \quad -5 \leq k \leq 3$$

 k は自然数から, $k=1, 2, 3$ となる。(i) $k=1$ のとき ③から, $n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり, $n=13$ (ii) $k=2$ のとき ③から, $n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり, $n=\frac{10}{3}$ より不適(iii) $k=3$ のとき ③から, $n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり, $n=1$ (i)~(iii)より, $n=1, 13$ である。**[解説]**

整数問題ですが, (1)の誘導が強力なため, 基本的な内容になっています。

19

[九州大・文]

(1) 自然数 a と b の最大公約数を $G(a, b)$ と表すと、

ユークリッドの互除法より、

$$\begin{aligned} G(2017, 225) &= G(225, 217) = G(217, 8) \\ &= G(8, 1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 27 \quad 1 \quad 8 \\ 8 \overline{) 217} \quad 225 \overline{) 2017} \\ \underline{16} \quad \underline{217} \quad \underline{1800} \\ 57 \quad 8 \quad 217 \\ \underline{56} \\ 1 \end{array}$$

(2) $15 = 3 \times 5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は、

$$15 \times 1, 15 \times 2, 15 \times 3, \dots, 15 \times 134$$

すると、 $225 = 3^2 \times 5^2$ から、225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は、134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで、134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個、5 の倍数となるものが 26 個、15 の倍数となるものが 8 個である。

よって、求める自然数の個数は、 $134 - (44 + 26 - 8) = 72$ である。

(3) $111 = 3 \times 37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は、

$$111 \times 1, 111 \times 2, 111 \times 3, \dots, 111 \times 18$$

すると、 $1998 = 111 \times 2 \times 3^2$ から、1998 との最大公約数が 111 の自然数は、18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり、

$$111 \times 1, 111 \times 5, 111 \times 7, 111 \times 11, 111 \times 13, 111 \times 17$$

さらに、225 との最大公約数が 15 から、求める自然数は $111 \times 5 = 555$ である。

[解説]

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため、2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ、これをストレートに利用して、いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

20

[筑波大・理]

(1) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + a_{n+1}$ に対して、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)^2$$

ここで、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、 $b_1 = 2 \geq 0, b_{n+1} = 3b_n^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ よって、帰納的に、 $b_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ である。(2) 以下、 b_n の一の位の数 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。(i) $n = 1$ のとき $b_1 = 2$ より成立している。(ii) $n = k$ のとき b_k の一の位の数 2 であると仮定する。これより、 l_k を 0 以上の整数として、 $b_k = 10l_k + 2$ とおくと、 $\textcircled{1}$ から、

$$b_{k+1} = 3b_k^2 = 3(10l_k + 2)^2 = 300l_k^2 + 120l_k + 12 = 10(30l_k^2 + 12l_k + 1) + 2$$

よって、 b_{k+1} の一の位の数 2 である。(i)(ii) より、 b_n の一の位の数 2 である。(3) (2) より、 l_n を 0 以上の整数として、 $b_n = 10l_n + 2$ とおくことができ、

$$a_{n+1} - a_n = 10l_n + 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると、 $n \geq 2$ において、 $\textcircled{2}$ から、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (10l_k + 2)$ となり、

$$a_{2017} = 1 + 10 \sum_{k=1}^{2016} l_k + 2 \cdot 2016 = 10 \sum_{k=1}^{2016} l_k + 4033 = 10 \left(\sum_{k=1}^{2016} l_k + 403 \right) + 3$$

したがって、 a_{2017} の一の位の数 3 である。

[解説]

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが、丁寧に書くなら数学的帰納法です。また、(2)(3)は合同式を用いると、少し簡略になります。

21

[東京大]

(1) $p = 2 + \sqrt{5}$, $a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$ に対し, $q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 2 - \sqrt{5}$ とおくと,

$$a_n = p^n + q^n = (2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n$$

これより, $a_1 = (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$, $a_2 = (2 + \sqrt{5})^2 + (2 - \sqrt{5})^2 = 18$ となる。

(2) $n \geq 2$ で, $a_1 a_n = (p + q)(p^n + q^n) = p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1})$

すると, $pq = -1$ より, $a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$

(3) (2)より, $4a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ となり, $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} (n \geq 2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$

ここで, a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 1, 2$ のとき (1)より a_n は自然数である。

(ii) $n = k - 1, k (k \geq 2)$ のとき a_{k-1}, a_k がともに自然数であると仮定する。

①より, $a_{k+1} = 4a_k + a_{k-1}$ となるので, a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より, a_n は自然数である。

(4) まず, (1)より, a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして, a_1 と a_2 がともに偶数のとき, ①から, 帰納的に, すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで, $a_n = 2b_n$ とおくと, すべての b_n は自然数となり, $2b_1 = 4$, $2b_2 = 18$, $2b_{n+1} = 4 \cdot 2b_n + 2b_{n-1}$ から,

$$b_1 = 2, b_2 = 9, b_{n+1} = 4b_n + b_{n-1} (n \geq 2) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

さて, b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると, 2 以上の自然数 g を用いて,

$$b_{n+1} = gb_{n+1}', b_n = gb_n' \quad (b_{n+1}', b_n' \text{ は自然数})$$

②より, $b_{n-1} = b_{n+1} - 4b_n = g(b_{n+1}' - 4b_n')$ となり, b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと, b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが, $b_1 = 2$, $b_2 = 9$ より不適である。よって, b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より, a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

[解説]

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き, この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。

22

[九州大・理]

- (1) 初項 1, 公差 4 の等差数列
- $\{a_n\}$
- の一般項は,
- $a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

さて, a_n が 7 の倍数となるのは, k を自然数として, $4n - 3 = 7k \cdots \cdots \textcircled{1}$ ここで, $4 \times (-1) - 3 = 7 \times (-1)$ から, $\textcircled{1}$ を変形すると,

$$4(n+1) = 7(k+1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, l を整数として $n+1 = 7l$, $k+1 = 4l$ となり,

$$n = 7l - 1, \quad k = 4l - 1$$

そこで, $1 \leq n \leq 600$, $k \geq 1$ から, $1 \leq 7l - 1 \leq 600$, $4l - 1 \geq 1$ となり,

$$\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{601}{7} = 85 + \frac{6}{7}$$

これより, $l = 1, 2, \dots, 85$ となり, 7 の倍数である項の個数は 85 である。

- (2)
- $\{a_n\}$
- の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数の項を取り出して
- b_l
- とおくと,

$$b_l = a_{7l-1} = 4(7l-1) - 3 = 28l - 7 = 7(4l-1) \quad (l=1, 2, \dots, 85)$$

さて, a_n が 7^2 の倍数, すなわち b_l が 7 の倍数となるのは, m を自然数として,

$$4l-1 = 7m \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $4 \times 2 - 1 = 7 \times 1$ から, $\textcircled{3}$ を変形すると,

$$4(l-2) = 7(m-1)$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, p を整数として $l-2 = 7p$, $m-1 = 4p$ となり,

$$l = 7p + 2, \quad m = 4p + 1$$

そこで, $1 \leq l \leq 85$, $m \geq 1$ から, $1 \leq 7p + 2 \leq 85$, $4p + 1 \geq 1$ となり,

$$0 \leq p \leq \frac{83}{7} = 11 + \frac{6}{7}$$

これより, $p = 0, 1, \dots, 11$ となり, 7^2 の倍数である項の個数は 12 である。

- (3)
- a_n
- が 7 の倍数のとき,
- $n = 7l - 1$
- (
- $l \geq 1$
-) となり, この
- n
- を書き並べると,

$$6, \underline{13}, 20, 27, 34, 41, 48 \mid 55, \underline{62}, 69, 76, 83, 90, 97 \mid 104, \underline{111}, 118, \dots$$

そして, この数列を 7 個ずつの区画に分け, 左から第 1 群, 第 2 群, …と呼ぶ。

また, a_n が 7^2 の倍数の項を取り出して c_p とおくと, $l = 7p + 2$ から,

$$n = 7(7p+2) - 1 = 49p + 13 \quad (p \geq 0)$$

すると, 上記の数列の下線をつけた数に対応して,

$$c_p = a_{49p+13} = 4(49p+13) - 3 = 196p + 49 = 7^2(4p+1) \quad (p \geq 0)$$

さらに, a_n が 7^3 の倍数, すなわち c_p が 7 の倍数になるのは, 同様にすると, q を 0 以上の整数として,

$$4p+1 = 7q \cdots \cdots \textcircled{4}$$

そして, $\textcircled{4}$ を満たす最小の p, q の値は $(p, q) = (5, 3)$ であり, このときの n は, $n = 49 \cdot 5 + 13 = 258$ となり, $a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 7^3 \cdot 3$ である。

この $n = 258$ は、 $7l - 1 = 258$ から $l = 37$ となり、上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて、積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n については、素因数 7 の個数に注目し、これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず、第 5 群までは a_n に 7^3 の倍数がないので、1 つの群内に素因数 7 が $7 + 1 = 8$ 個ずつとなり、その総数は $8 \times 5 = 40$ 個である。

すると、素因数 7 の残り 5 個について調べるために、第 6 群を書き並べると、

| 251, 258, 265, 272, ……

これより、 a_{251} は 7 の倍数、 a_{258} は 7^3 の倍数、 a_{265} は 7 の倍数、…となるので、積 $a_{251} a_{258} a_{265}$ に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より、積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n は、 $n = 265$ である。

[解説]

整数と数列の融合問題です。解答例では、頻出の(1)の結果を利用して、(2)につなげています。なお、(3)は群数列の考え方をもとにしていますが、45 という数値が意味深長で、詰めがかなり面倒でした。

23

[名古屋大・文]

(1) 条件(*)から, 自然数 a, b, c に対し, $a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ ……①

すると, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > 0$ となるので, ①から $\frac{3}{a} > \frac{1}{2}$, すなわち $a < 6$ ……②

また, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 0$ なので, ①から $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$, すなわち $a > 2$ ……③

②③より $2 < a < 6$ となり, $a = 3, 4, 5$ である。

(i) $a = 3$ のとき ①より $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ となり,

$$bc - 6b - 6c = 0, (b-6)(c-6) = 36$$

ここで, $3 < b < c$ から $-3 < b-6 < c-6$ となり,

$$(b-6, c-6) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)$$

よって, $(b, c) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)$

(ii) $a = 4$ のとき ①より $\frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ となり,

$$bc - 4b - 4c = 0, (b-4)(c-4) = 16$$

ここで, $4 < b < c$ から $0 < b-4 < c-4$ となり,

$$(b-4, c-4) = (1, 16), (2, 8)$$

よって, $(b, c) = (5, 20), (6, 12)$

(iii) $a = 5$ のとき ①より $\frac{1}{5} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$ となり,

$$3bc - 10b - 10c = 0, 9bc - 30b - 30c = 0, (3b-10)(3c-10) = 100$$

$5 < b < c$ から $5 < 3b-10 < 3c-10$ となり, 適する $(3b-10, 3c-10)$ はない。

(i)~(iii)より, 自然数の組 (a, b, c) は,

$$(a, b, c) = (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15),$$

$$(4, 5, 20), (4, 6, 12)$$

(2) $2n$ の正の約数 p, q, r に対し, $p > q > r$ かつ $p+q+r=n$ ……④を満たす

(p, q, r) の個数を $f(n)$ とすると, ④から,

$$\frac{p}{2n} + \frac{q}{2n} + \frac{r}{2n} = \frac{1}{2} \text{ ……⑤}$$

ここで, $\frac{2n}{p} = a, \frac{2n}{q} = b, \frac{2n}{r} = c$ とおくと, a, b, c は自然数となり, さらに,

$p > q > r$ から, $\frac{2n}{p} < \frac{2n}{q} < \frac{2n}{r}$ すなわち $a < b < c$ である。

さらに, ⑤を a, b, c で表すと, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ である。

すなわち, 自然数の組 (p, q, r) は, 条件(*)を満たす自然数の組 (a, b, c) に対応し, その個数 $f(n)$ の最大値 M は, (1)の結果から $M \leq 6$ である。

以下、この6つの場合について、 n の条件を求める。

$$(i) \quad (a, b, c) = (3, 7, 42) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 7, \frac{2n}{r} = 42 \text{ より,}$$

$$3p = 2n, \quad 7q = 2n, \quad 21r = n$$

よって、このとき n は 21 の倍数である。

$$(ii) \quad (a, b, c) = (3, 8, 24) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 8, \frac{2n}{r} = 24 \text{ より,}$$

$$3p = 2n, \quad 4q = n, \quad 12r = n$$

よって、このとき n は 12 の倍数である。

$$(iii) \quad (a, b, c) = (3, 9, 18) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 9, \frac{2n}{r} = 18 \text{ より,}$$

$$3p = 2n, \quad 9q = 2n, \quad 9r = n$$

よって、このとき n は 9 の倍数である。

$$(iv) \quad (a, b, c) = (3, 10, 15) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 10, \frac{2n}{r} = 15 \text{ より,}$$

$$3p = 2n, \quad 5q = n, \quad 15r = 2n$$

よって、このとき n は 15 の倍数である。

$$(v) \quad (a, b, c) = (4, 5, 20) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 4, \frac{2n}{q} = 5, \frac{2n}{r} = 20 \text{ より,}$$

$$2p = n, \quad 5q = 2n, \quad 10r = n$$

よって、このとき n は 10 の倍数である。

$$(vi) \quad (a, b, c) = (4, 6, 12) \text{ のとき } \frac{2n}{p} = 4, \frac{2n}{q} = 6, \frac{2n}{r} = 12 \text{ より,}$$

$$2p = n, \quad 3q = n, \quad 6r = n$$

よって、このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より、自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M = 6$ となる。

ここで、 $21 = 3 \times 7$ 、 $12 = 2^2 \times 3$ 、 $9 = 3^2$ 、 $15 = 3 \times 5$ 、 $10 = 2 \times 5$ 、 $6 = 2 \times 3$ から、 n が $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ の倍数のとき、条件をすべて満たす。

以上より、 $M = 6$ で、 $f(n) = 6$ となる最小の n は $n = 1260$ である。

[解説]

質、量ともかなりハードな整数問題です。ただ、(1)が(2)への秀逸な誘導となっており、入試までに演習したい1題です。なお、(1)は、場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが、不等式を用いて評価しても構いません。