10　　［京都大・文］

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。

11　　［東京大・理］

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

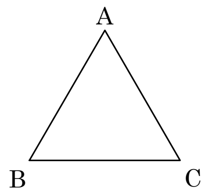
(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{12}$ ［広島大・理］

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

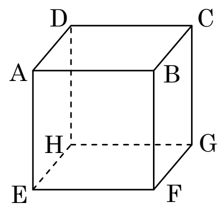
R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2, P_3 を求めよ。

(2) P_{2m}, P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n\geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m\geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

$\boxed{10}$ 　［京都大・文］

(1)　さいころを n 回振り，出た目の最大値を M, 最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　$M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A, 2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$\begin{aligned}1-P(A\cup B)&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解　説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

11 ［東京大・理］

(1) 点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ A, B, C, D とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回, b 回, c 回, d 回起こったとすると，

$a+b+c+d=6$ ………①，$b-d=a-c$ ………②

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$a+b+c+d=6$ ………③，$a-c=0$ ………④，$b-d=0$ ………⑤

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$(0,\ 3,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 1,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 2,\ 1)$，$(3,\ 0,\ 3,\ 0)$

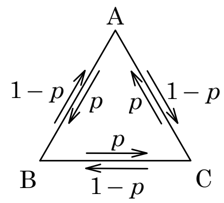
すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］



(1)　まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは，$A\to B\to A$ または $A\to C\to A$ から，その確率 P_2 は,

$$P_2 = p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$$

また，R が 3 回目に A に初めて戻るのは，$A\to B\to C\to A$ または $A\to C\to B\to A$ から，その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3+(1-p)^3 = 1-3p+3p^2$$

(2)　R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→B→…→C→B→A または A→C→B→C→B→C→…→B→C→A から，その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

また，R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→…→B→C→A または A→C→B→C→B→…→C→B→A から，その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1}+(1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1} \\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，(2)より，$P_{2m} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて，R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

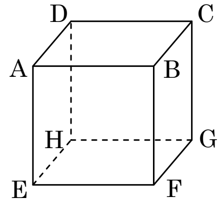
(i)(ii)より，R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

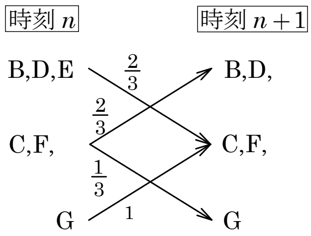
$$Q = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

［解　説］

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・文]





(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$p_1=1$，$q_1=r_1=0$ なので，①②③より，

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\ q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\ r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\ q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\ r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて，④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\ r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0$ (n が奇数)，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

[解　説]

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。