$\boxed{1}$ ［千葉大］

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

1　　　　［千葉大］

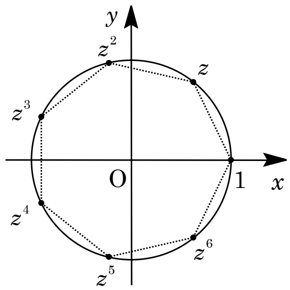
(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は２次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1$，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解　説］

１の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

$\boxed{2}$ ［東北大］

多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数a_0，$\cdots$，a_7をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めたa_1，a_3，a_5，a_7を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ ［東北大］

(1) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$=\dfrac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ から，

$a_0=a_2=a_4=a_6=0$，$a_1=7$，$a_3=-35$，$a_5=21$，$a_7=-1$

(2) ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{1}{2i}\Big\{\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\Big)^7-\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\Big)^7\Big\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\}$$

$$=\frac{2i\sin7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$Q(x)=P(\sqrt{x})$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}>0$，$\dfrac{\cos3\theta}{\sin3\theta}>0$ から，$(*)$を用いて，

$$Q(x_1)=Q\Big(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$

$$Q(x_2)=Q\Big(\frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2 2\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big)=\frac{\sin14\theta}{\sin^7 2\theta}=\frac{\sin2\pi}{\sin^7 2\theta}=0$$

$$Q(x_3)=Q\Big(\frac{\cos^2 3\theta}{\sin^2 3\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big)=\frac{\sin21\theta}{\sin^7 3\theta}=\frac{\sin3\pi}{\sin^7 3\theta}=0$$

さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は 3 次方程式 $Q(x)=0$ の異なる 3 つの解となり，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

［解　説］

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

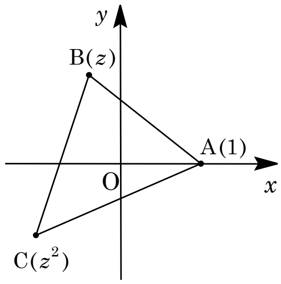
$\boxed{3}$ ［東京大］

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

3 ［東京大］

3 点A(1)，B(z)，C(z^2)に対し，△ABC は鋭角三角形より，まず$z\neq 1$かつ$z^2\neq z$かつ$z^2\neq 1$より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$



さて，$\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

すると，zは点-1を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

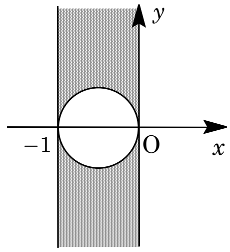
すると，$-z$は虚軸の右側にあるので，zは虚軸の左側にある。

さらに，$\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$

すると，zは原点と点-1を直径とする円の外部にある。

以上より，z の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



［解 説］

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

$\boxed{4}$ ［広島大］

複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

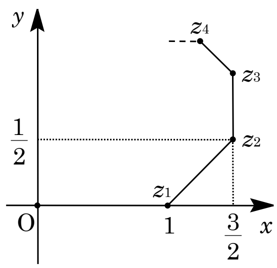
(1) z_3，z_4 を求めよ。

(2) z_n を α, n を用いて表せ。

(3) P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4) z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

4 ［広島大］



(1) $\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$なので，点$\alpha z$は点 z を原点回りに$\dfrac{\pi}{4}$回転し，原点との距離$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍した点である。

すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2) $(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$となり，$n\geqq 2$で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$である。

(3) $n\to\infty$のとき$|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4) (2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_nの実部がwの実部１より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$となるので，$k$を０以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ 8k+1<n<8k+5$$

よって，$n=8k+2,\ 8k+3,\ 8k+4$である

［解 説］

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

$\boxed{5}$ ［筑波大］

複素数平面上を動く点zを考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式$|z-1|=|z+1|$を満たす点zの全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) aを正の実数とする。点zが虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$|z-1|=|z+1|$……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。

これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z}\ (z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

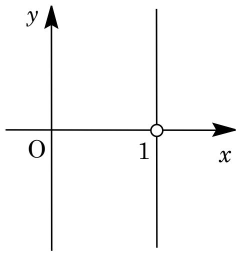
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$$\frac{|2-w|}{|w-1|}=\frac{|w|}{|w-1|},\ |2-w|=|w|$$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3)　$a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$$\left|\frac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\frac{(a+1)w}{w-1}\right|,\ |(a-1)w+2|=|(a+1)w|$$

両辺を 2 乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$$

$$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4,\ w\overline{w}-\frac{a-1}{2a}w-\frac{a-1}{2a}\overline{w}=\frac{1}{a}\ \text{………⑥}$$

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

$$\left|w-\frac{a-1}{2a}\right|^2=\frac{(a+1)^2}{4a^2},\ \left|w-\frac{a-1}{2a}\right|=\frac{a+1}{2a}$$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq 1$ から点 1 は除く。

［解　説］

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。

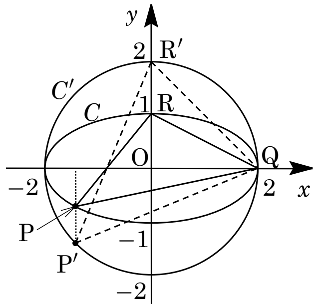
$\boxed{6}$ ［金沢大］

曲線$C: x^2+4y^2=4$上を動く点 P と，C 上の定点$\mathrm{Q}(2,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 1)$がある。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ ［金沢大］



(1) まず，楕円 $C: x^2+4y^2=4$ を y 軸方向に 2 倍拡大して，円 $C': x^2+y^2=4$ をつくるとする。

このとき，点 P は P′，点 R(0, 1) は R′(0, 2) に対応し，点 Q(2, 0) の位置は変わらない。

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$ より，△PQR の面積が最大になるのは，△P′QR′ の面積が最大のときである。

このときの点 P′ の座標は，直線 $y=x$ に関する対称性から，$\mathrm{P'}\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$ すなわち $\mathrm{P'}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ である。また最大値は,

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって，△PQR は $\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のときに最大となり，最大値は,

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2) (1)と同様にして，円 C' の内側で直線 P′Q の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解 説］

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

$\boxed{7}$ ［新潟大］

一般項が $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

$\boxed{7}$ ［新潟大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n = n^{n-1}$ となり，

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leqq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

(2)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3)　2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}\\
&= \frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k\log k - (k-1)\log n\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)\} - (k-1)\log n - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (k-1)n\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (kn-n)\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\} - k\log k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx - k\log k\\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1} - \int_0^{k-1}dx - k\log k\\
&= k\log k - (k-1) - k\log k = 1-k
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

［解　説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。

8　　［大阪大］

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び, 円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

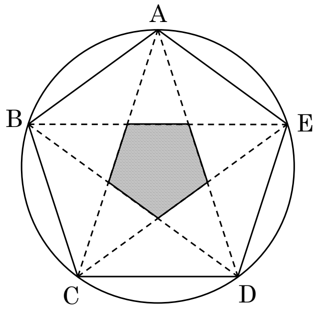
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

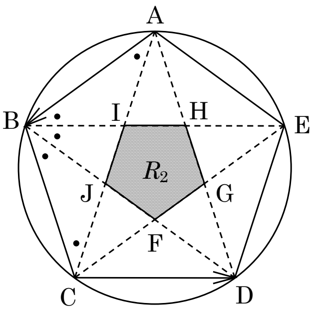
(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。



斜線部分が R_2

8　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］



(1)　5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F，G，H，I，J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=x$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=y$ とすると，

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\cdots\cdots\cdots④$

また，AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり，

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3)　R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から，

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので，

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

［解　説］

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。

$\boxed{9}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　c は正の定数, $x+y=c\ (x>0,\ y>0)$ のとき, $P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと,

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係より, $c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり,

$\dfrac{1}{xy}\geqq\dfrac{4}{c^2}$　（等号は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき成立）

よって, $P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり, P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2)　$x+y+z=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき, $Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで, $x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり, $1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると, (1)の結果から,

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお, 等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで, $f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと,

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

これより, $f(z)$ の増減は右表のようになり, $z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

したがって, Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$, $z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

［解 説］

条件付きの最大・最小問題です。(2)では, (1)の結果の利用するため, いったん z を固定して考えています。なお, $f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと, 相当な計算量になります。

$\boxed{10}$　　［名古屋大］

２つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

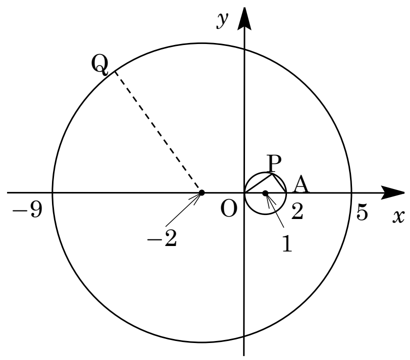
(1)　円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2)　(1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3)　点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2)，(3)においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。

$\boxed{10}$　　［名古屋大］



(1)　$A(2,\ 0)$ とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle APO=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\angle AOP=\theta$ より，

$$OP=OA\cos\theta=2\cos\theta$$

また，$P(x,\ y)$ とおくと，

$$x=OP\cos\theta,\ y=OP\sin\theta$$

よって，$P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

(2)　中心 $(-2,\ 0)$ で半径 7 の円 D 上の点 Q を，$Q(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot 7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，$Q(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$ である。

(3)　(2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S'=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot 2\cos\theta=-7\sin\theta-2\sin^2\theta+2(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(4\sin\theta-1)(\sin\theta+2)$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，S は増減が右表のようになり，$\theta=\alpha$ で最大となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，S の最大値は，

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$$

［解 説］

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

$\boxed{11}$ [金沢大]

a, b を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし, x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき, 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

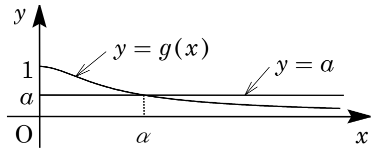
11　　［金沢大］

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\Big)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は,

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\Big(\frac{1}{a^2}-1\Big)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

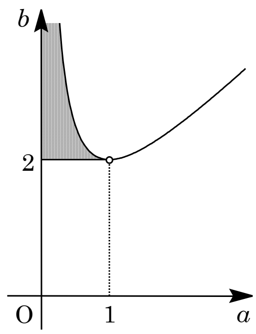
(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき，

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ に注意して点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

12　　［東京大］

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

12 ［東京大］

まず，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e$ ………①

また，$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e$ ………②

したがって，①②より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

［解 説］

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

$\boxed{13}$ ［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2) $1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3) $x \geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

13　　　　［千葉大］

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$f(x)\geqq 1>0$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	1	↗

よって，$x>0$ において，$\log x<x$ ………①

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c),\ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x\geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$
$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

すると，$x\geqq e$ において，$F(x)\geqq F(e)=0-\log 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ となり，

$$\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。

$\boxed{14}$ ［北海道大］

$a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

14　　［北海道大］

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt=\frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C$ ……①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\big[\cos t\big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\quad e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\dfrac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\dfrac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2)　$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(a)$		↘		↗	

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。そして，$g(a)$ は $a=\pi$ のとき最小となり，最小値は，

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

［解　説］

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

$\boxed{15}$ ［信州大］

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］

(1)　$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ とおくと，$I_{n+1}=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ となり，

$$I_{n+1}=\Big[\,x(1-x^2)^{n+1}\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n(-2x)dx$$
$$=-2(n+1)\int_0^1 -x^2(1-x^2)^n dx$$
$$=(-2n-2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^n dx=(-2n-2)(I_{n+1}-I_n)$$

よって，$(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$ より，$I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}I_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$I_n=I_1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

ここで，$I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ から，

$$I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$n=1$ をあてはめると，$I_1=\frac{4\cdot(1!)^2}{3!}=\frac{2}{3}$ となり成立するので，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　二項定理より，$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}$ となり，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}\Big)dx=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

よって，$(*)$から，$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

［解　説］

定積分がらみで誘導なしの証明問題ですが，(1)の右辺の形には，部分積分から漸化式という流れが暗示されています。上の解答例以外に，まず $x=\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と置換する方法もあり，そうすると参考書などには必ず載っている有名な定積分が対応します。また，(2)では左辺の階乗の部分が ${}_n\mathrm{C}_k$ であることがわかりますので，二項展開という方針は明快です。なお，漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{16}$ ［熊本大］

$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

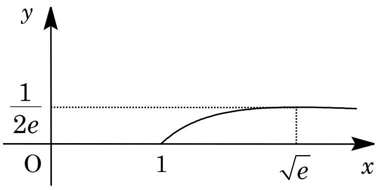
16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$x \geqq 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ に対して，$f'(x) = \dfrac{x^{-1}x^2 - 2x\log x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x) = 0$ の解は $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ であるので，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x = \sqrt{e}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2)　曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = \sqrt{e}$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，



$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t = \log x$ とおくと，$dt = \dfrac{1}{x}dx$ となり，

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} te^{-t}dt = -\Big[\,te^{-t}\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \Big[\,e^{-t}\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 = -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1$$

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V = \int_1^{\sqrt{e}} 2\pi x \cdot \frac{\log x}{x^2}dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x}dx = 2\pi\Big[\,\frac{1}{2}(\log x)^2\,\Big]_1^{\sqrt{e}} = \pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi}{4}$$

［解　説］

面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお, (3)の解答例は円筒分割によるものです。

$\boxed{17}$ ［信州大］

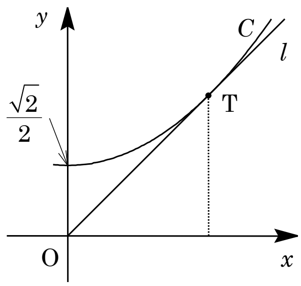
半直線 $l: y = x\ (x \geqq 0)$，放物線 $C: y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2) $t \geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

(3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ ［信州大］



(1)　$l : y = x\ (x \geqq 0) \cdots\cdots$①，$C : y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdots\cdots$②に対して，①と②を連立すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x,\ \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = 0$$

すると，$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2 = 0$ から $x = \sqrt{2}$ となり，接点 T の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$である。

(2)　l 上の点 $\mathrm{A}(t)$ の座標は，$\mathrm{OA}(t) = t$ から$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

これより，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線は，

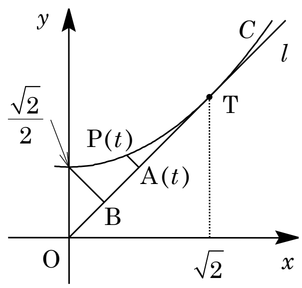
$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}t = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\ y = -x + \sqrt{2}t \cdots\cdots\cdots ③$$

②③を連立すると，$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -x + \sqrt{2}t$，$\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t = 0$ となり，

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 - 4t = 0,\ x = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}$$

③から $y = \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t$ なので，求める共有点の座標は，

$$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t),\ (-\sqrt{2} - 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} + 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$$



(3)　$\mathrm{P}(t)$ の座標を$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$とし，2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{P}(t)$ の距離を $d(t)$ とおくと，

$$d(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \sqrt{2} - 2\sqrt{t}\right) = t - 2\sqrt{2t} + 2$$
$$= (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$$

さて，点$\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$から l の下ろした垂線の足を B とすると $\mathrm{OB} = \frac{1}{2}$ であり，また(1)より，$\mathrm{OT} = 2$ である。

そこで，C と l および y 軸とで囲まれた図形を，l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} \{d(t)\}^2 dt = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt$$

ここで，$u = \sqrt{t} - \sqrt{2}$ とおくと，$du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2(u + \sqrt{2})}dt$ となり，

$$V = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} u^4 \cdot 2(u + \sqrt{2})du = \frac{\pi}{24} + 2\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (u^5 + \sqrt{2}u^4)du$$
$$= \frac{\pi}{24} + 2\pi\left[\frac{u^6}{6} + \frac{\sqrt{2}}{5}u^5\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}$$

［解 説］

斜回転体の体積を求める問題で，(2)が(3)の誘導です。ただ，$\mathrm{OA}(t)$ の長さを t としたとき，$\mathrm{P}(t)$ の座標がややこしくないように問題が設定されています。その結果，$d(t)$ が簡単な式として表せ，積分計算も標準的というわけです。

$\boxed{18}$ ［京都大］

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

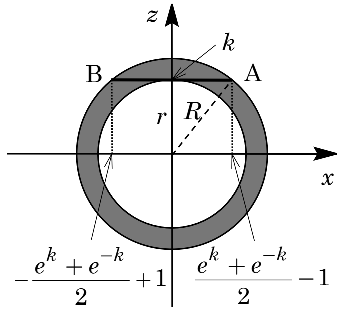
この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

18　　　　［京都大］

図形 D : $y=z$，$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0\leqq y\leqq\log a\ (a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x|\leqq\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0\leqq k\leqq\log a$$

平面 $y=k$ 上で図示すると，右図の線分 AB となる。



さて，この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left\{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2\right\}-\pi k^2=\pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

したがって，図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a}S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\Big]_0^{\log a}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-4(a-1)+4\left(\frac{1}{a}-1\right)+6\log a\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right)$$

［解　説］

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め，それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

19　　　　［神戸大］

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3)　曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4)　曲線 C の長さを求めよ。

19　　［神戸大］

(1)　$C : r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を直交座標で表すと，

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin 2\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となり，対応する点は順に，

$$(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (2,\ 0)$$

②より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ となり，対応する点は順に，

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$ より，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{-2-1}{-2+1}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3)　$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおき，

$$f(2\pi-\theta)=f(\theta)$$

$$g(2\pi-\theta)=-g(\theta)$$

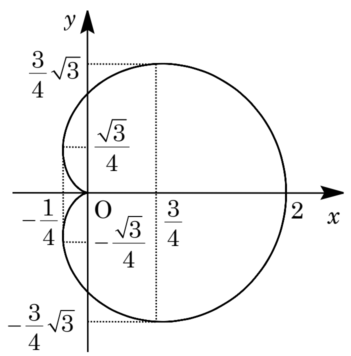
これより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸対称となり，まず $0\leqq\theta\leqq\pi$ において $x,\ y$ の増減を調べると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	↘	$\dfrac{3}{4}$	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0

また，(2)から $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$ であり，さらに，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

そして，この $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸に折り返してできる $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分を合わせると，曲線 C の概形は右図のようになる。



(4)　曲線 C の長さを l とし，(1)から，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

x 軸に関する対称性を利用すると,

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{1+1+2\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 8$$

［解　説］

カージオイドの概形をかき，その長さを求める問題です。まったく同じ問題を，一度は演習したにちがいないと思われますが……。