$\boxed{5}$ ［北海道大・文］

$\triangle ABC$ が，$AB = 2$，$AC = 1+\sqrt{3}$，$\angle ACB = 45°$ を満たすとする。

(1) $\beta = \angle ABC$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1)の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。$\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

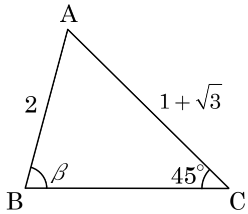
6　　［京都大・文］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

5　　［北海道大・文］



(1)　△ABC に正弦定理を適用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ から，

$$\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

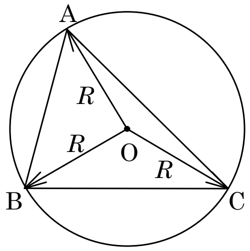
$$=1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$2<1+\sqrt{3}$ より $45^\circ<\beta$ であり，しかも $\beta<180^\circ-45^\circ=135^\circ$ から，

$$45^\circ<\beta<135^\circ,\ \ 90^\circ<2\beta<270^\circ$$

すると，(＊)から $2\beta=150^\circ$，210° なので，$\beta=75^\circ$，105°

(3)　△ABC は鋭角三角形なので，$\beta=75^\circ$ である。



また，O は△ABC の外接円の中心より，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\times45^\circ=90^\circ,\ \ \angle\mathrm{AOC}=2\beta=150^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$$

さらに，外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R,\ \ R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\sqrt{2})^2\cos 90^\circ=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos150^\circ=-\sqrt{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos120^\circ=-1$$

さて，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

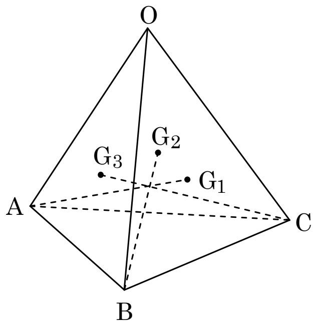
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2s,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2t$$

よって，$2s=-\sqrt{3}$，$2t=-1$ となり，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

［解　説］

三角比とベクトルの融合問題です。(3)では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に注目して，内積の値で処理をしました。他にも，ベクトルの大きさに注目する方法が考えられます。

6 ［京都大・文］



まず, 四面体 OABC の面 OBC, 面 OCA, 面 OAB の重心を, それぞれ G_1, G_2, G_3 とおく。

また, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると,

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

すると, $\overrightarrow{AG_1}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ここで, 条件より, A から面 OBC に下ろした垂線の足が G_1 なので, $\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OB}$ かつ $\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OC}$ となり,

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

同様に, $\overrightarrow{BG_2}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$ から, $\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OC}$ なので,

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

さらに, $\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$ から, $\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OB}$ なので,

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

すると, ①⑥より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, ②④より $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, ③⑤より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ となり, k を定数として,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

これより, ①⑥は $|\vec{b}|^2=2k$, ②④は $|\vec{c}|^2=2k$, ③⑤は $|\vec{a}|^2=2k$ となり,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2k}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで, $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC$ から, ⑦⑧を代入すると, $k=(\sqrt{2k})^2\cos\angle BOC$

$$\cos\angle BOC=\frac{1}{2},\ \angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

同様にすると, $\angle COA=\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ となり, 四面体 OABC の面はすべて合同な正三角形である。すなわち, 四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。連立方程式をまとめていくのがポイントです。