

5

[信州大・医]

n を 2 以上の自然数とする。 n 人でじゃんけんをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし、負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1 回目のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。
- (2) 1 回目のじゃんけんで、あいこになる確率を求めよ。
- (3) $n=5$ のとき、ちょうど 2 回のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

6

[東北大・理]

サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。
- (2) a, b, c がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

7

[東京大・文]

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、 k 試合目の勝者と、 k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

8

[名古屋大・理]

玉が2個ずつ入った2つの袋A, Bがあるとき, 袋Bから玉を1個取り出して袋Aに入れ, 次に袋Aから玉を1個取り出して袋Bに入れる, という操作を1回の操作と数えることにする。Aに赤玉が2個, Bに白玉が2個入った状態から始め, この操作を n 回繰り返した後に袋Bに入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $k=0, 1, 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。
- (2) $k=0, 1, 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

9

[広島大・文]

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, \dots, x_n であるとし、 $f(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2$ とする。

$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, \dots, x_n の平均値で、そのときの最小値は x_1, x_2, \dots, x_n の分散であることを示せ。

- (2) c を定数として、変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k = k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad z_k = ck \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, \dots, y_n の分散が z_1, z_2, \dots, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

- (3) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, \dots, x_n であるとし、その平均値を \bar{x} とする。新たにデータを得たとし、その値を x_{n+1} とする。 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ の平均値を x_{n+1}, \bar{x} および n を用いて表せ。

- (4) 次の 40 個のデータの平均値, 分散, 中央値を計算すると, それぞれ, ちょうど 40, 670, 35 であった。

| | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 120 | 10 | 60 | 70 | 30 | 20 | 20 | 30 | 20 | 60 |
| 40 | 50 | 40 | 10 | 30 | 40 | 40 | 30 | 20 | 70 |
| 100 | 20 | 20 | 40 | 40 | 60 | 70 | 20 | 50 | 10 |
| 30 | 10 | 50 | 80 | 10 | 30 | 70 | 10 | 60 | 10 |

新たにデータを得たとし、その値が 40 であった。このとき、41 個のすべてのデータの平均値, 分散, 中央値を求めよ。ただし、得られた値が整数でない場合は、小数第 1 位を四捨五入せよ。

5

[信州大・医]

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき、勝者がただ 1 人に決まるのは、勝者の選び方が ${}_n C_1 = n$ 通りで、手の出方が 3 通りである。

これより、この場合の確率は、 $\frac{n \cdot 3}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき、あいこにならないのは、2 種類の手が出た場合である。このとき、種類の選び方が ${}_3 C_2 = 3$ 通り、出方が $2^n - 2$ 通りとなり、その確率は、 $\frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ である。

よって、あいこになる確率は、 $1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし、2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは、

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\frac{3^4 - 2^5 + 2}{3^4} = \frac{17}{3^3}$ 、5 人→1 人の確率は(1)より $\frac{5}{3^4}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{17}{3^3} \cdot \frac{5}{3^4} = \frac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え、その確率は(1)から $\frac{5}{3^4}$ 、4 人→1 人の確率は(1)より $\frac{4}{3^3}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{5}{3^4} \cdot \frac{4}{3^3} = \frac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5 C_3 = 10$ 通り、手の出方が 3 通りより、その確率は $\frac{10 \cdot 3}{3^5} = \frac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\frac{3}{3^2}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{10}{3^4} \cdot \frac{3}{3^2} = \frac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え、その確率は(iii)から $\frac{10}{3^4}$ 、2 人→1 人の確率は(1)より $\frac{2}{3}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{10}{3^4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3^5}$ である。

(i)～(iv)より、求める確率は、 $\frac{85}{3^7} + \frac{20}{3^7} + \frac{30}{3^6} + \frac{20}{3^5} = \frac{375}{3^7} = \frac{125}{729}$

[解説]

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが、意外なほど手こずります。

6

[東北大・理]

- (1) a, b, c が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは、斜辺の長さが c のとき、

$$a^2 + b^2 = c^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

そこで、 a^2 と b^2 、およびその和をまとめると、右表のようになる。

| | | | | | | |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|
| $b^2 \backslash a^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 |
| 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 29 | 40 |
| 9 | 10 | 13 | 18 | 25 | 34 | 45 |
| 16 | 17 | 20 | 25 | 32 | 41 | 52 |
| 25 | 26 | 29 | 34 | 41 | 50 | 61 |
| 36 | 37 | 40 | 45 | 52 | 61 | 72 |

すると、和が平方数なのは 25 だけより、

①を満たすのは、

$$(a, b, c) = (3, 4, 5), (4, 3, 5)$$

また、斜辺の長さが a, b の場合も同様なので、求める直角三角形となる確率は、 $\frac{2 \times 3}{6^3} = \frac{1}{36}$ である。

- (2) a, b, c が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは、最大辺の長さが c のとき、

$$a + b > c \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad a^2 + b^2 < c^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

まず、 $c = 1, 2$ では成立しないので $c \geq 3$ となり、それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i) $c = 3$ のとき

$$\textcircled{2} \text{より } a + b > 3, \quad \textcircled{3} \text{より } a^2 + b^2 < 9 \text{ から, } (a, b) = (2, 2)$$

(ii) $c = 4$ のとき

$$\textcircled{2} \text{より } a + b > 4, \quad \textcircled{3} \text{より } a^2 + b^2 < 16 \text{ から, } (a, b) = (2, 3), (3, 2)$$

(iii) $c = 5$ のとき

$$\textcircled{2} \text{より } a + b > 5, \quad \textcircled{3} \text{より } a^2 + b^2 < 25 \text{ から, } (a, b) = (2, 4), (3, 3), (4, 2)$$

(iv) $c = 6$ のとき

$$\textcircled{2} \text{より } a + b > 6, \quad \textcircled{3} \text{より } a^2 + b^2 < 36 \text{ から,}$$

$$(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$$

(i)～(iv)より、 (a, b) の組は $1 + 2 + 3 + 7 = 13$ 通りとなる。

また、最大辺の長さが a, b の場合も同様に 13 通りずつなので、求める鈍角三角形となる確率は、 $\frac{13 \times 3}{6^3} = \frac{13}{72}$ である。

[解説]

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は、表を作ると数えものが防げます。

7

[東京大・文]

(1) 5 試合目で A が優勝するのは、4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず、しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで、各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと、

(i) 1 試合目に A が勝つとき ACBAA の場合となり、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

(ii) 1 試合目に B が勝つとき BCAB... となり、この場合は不適。

(i)(ii)より、5 試合目で A が優勝する確率は $\frac{1}{32}$ である。

(2) n 試合目 ($n \geq 2$) で A が優勝する場合、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(i) 1 試合目に A が勝つとき ACBACBACB...ACBAA となる場合で、 n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii) 1 試合目に B が勝つとき BCABCABCA...BCAA となる場合で、 n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより、 n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると、

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}), \quad p(n) = 0 \quad (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき})$$

(3) l を正の整数とすると、(2)より、

(i) n を 3 で割った余りが 2 ($n = 3l - 1$) のとき $p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii) n を 3 で割った余りが 1 ($n = 3l + 1$) のとき $p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii) n を 3 で割った余りが 0 ($n = 3l$) のとき $p(n) = 0$

さて、 m を正の整数とすると、総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると、 $m \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{l=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1} + \sum_{l=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1} + 0 = 2 \sum_{l=1}^m \left(\frac{1}{8}\right)^l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \left(\frac{1}{8}\right)^l \\ &= 2 \cdot \frac{1}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m \right\} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right\} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m \right\} + \frac{1}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right\} = \frac{5}{14} - \frac{6}{7} \left(\frac{1}{8}\right)^m = \frac{5}{14} - \frac{6}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \end{aligned}$$

ここで、 $m = 1$ をあてはめると、 $P_1 = \frac{5}{14} - \frac{6}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ となり、成立している。

したがって、 $P_m = \frac{5}{14} - \frac{6}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

[解説]

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

8

[名古屋大・理]

(1) 袋 A に赤玉 2 個, 袋 B に白玉 2 個の状態から始めて, 与えられた操作を 1 回行った後, 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について, その確率 $P_1(k)$ は,

(i) $k=0$ のとき $B \rightarrow A$ に白, 次に $A \rightarrow B$ に白の場合より, $P_1(0) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(ii) $k=1$ のとき $B \rightarrow A$ に白, 次に $A \rightarrow B$ に赤の場合より, $P_1(1) = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

(iii) $k=2$ のとき この場合は起こりえないので, $P_1(2) = 0$

(2) 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について,

(i) 与えられた操作を n 回行った後, $k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(1)から, $k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii) 与えられた操作を n 回行った後, $k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき
 $k=0$ となるのは, $B \rightarrow A$ に赤, 次に $A \rightarrow B$ に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは, $B \rightarrow A$ に赤, 次に $A \rightarrow B$ に赤の場合, もしくは $B \rightarrow A$ に白, 次に $A \rightarrow B$ に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは, $B \rightarrow A$ に白, 次に $A \rightarrow B$ に赤の場合より, その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(iii) 与えられた操作を n 回行った後, $k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき

(i)と同様に考えて, $k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)~(iii)より, $P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は, $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) = 1$ に留意すると,

$$P_{n+1}(0) = \frac{1}{3}P_n(0) + \frac{1}{6}P_n(1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$P_{n+1}(1) = \frac{2}{3}P_n(0) + \frac{2}{3}P_n(1) + \frac{2}{3}P_n(2) = \frac{2}{3} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より, $P_n(1) = \frac{2}{3}$ ($n \geq 2$) となり, (1)から $P_1(1) = \frac{2}{3}$ なので, $P_n(1) = \frac{2}{3}$ ($n \geq 1$)

①に代入すると, $P_{n+1}(0) = \frac{1}{3}P_n(0) + \frac{1}{9}$ となり, $P_{n+1}(0) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\{P_n(0) - \frac{1}{6}\}$

$$P_n(0) - \frac{1}{6} = \left\{P_1(0) - \frac{1}{6}\right\} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって, $P_n(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ となり,

$$P_n(2) = 1 - P_n(0) - P_n(1) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

[解説]

確率と漸化式について, よく見かける頻出問題です。

9

[広島大・文]

- (1)
- x_1, x_2, \dots, x_n
- の平均値を
- \bar{x}
- , 分散を
- s^2
- とすると,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \bar{x}^2 - 2a\bar{x} + a^2 = (a - \bar{x})^2 + \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = (a - \bar{x})^2 + s^2 \end{aligned}$$

よって, $f(a)$ は $a = \bar{x}$ のとき最小となり, 最小値は s^2 である。

- (2)
- $z_k = cy_k$
- で,
- y_1, y_2, \dots, y_n
- の平均を
- \bar{y}
- ,
- z_1, z_2, \dots, z_n
- の平均を
- \bar{z}
- とすると,

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n cy_k = c \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = c\bar{y}$$

また, y_1, y_2, \dots, y_n の分散を s_y^2 , z_1, z_2, \dots, z_n の分散を s_z^2 とすると,

$$s_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^2 - (\bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (cy_k)^2 - (c\bar{y})^2 = c^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 - c^2 (\bar{y})^2 = c^2 s_y^2$$

条件 $s_y^2 > s_z^2$ から, $s_y^2 > c^2 s_y^2$ となり $c^2 < 1$, すなわち $-1 < c < 1$ である。

- (3)
- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$
- より,
- $\sum_{k=1}^n x_k = n\bar{x}$
- となり,
- $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$
- の平均値は,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} (n\bar{x} + x_{n+1})$$

- (4) 与えられた 40 個のデータに, 値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので, 41 個のデータの平均値は,

$$\frac{1}{41} (40 \cdot 40 + 40) = 40$$

40 個のデータの分散は 670 なので, 41 個のデータの分散は,

$$\frac{1}{41} \{670 \cdot 40 + (40 - 40)^2\} \doteq 653.6 \dots$$

よって, 小数第 1 位を四捨五入すると, 654 である。

40 個のデータの中央値は, 小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので, 41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

[解説]

データの分析に関して, 平均値や分散などの定義の確認問題です。