$\boxed{4}$ ［一橋大］

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ［岡山大］

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。

6　　　　［九州大・文］

座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a, b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2)　β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

$\boxed{7}$　　［大阪大・文］

曲線$C: y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$を考える。

(1)　Cと直線$L: y=-x+t$が異なる4点で交わるようなtの値の範囲を求めよ。

(2)　CとLが異なる4点で交わるとし，その交点をx座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$となるような$t$の値を求めよ。

(3)　tが(2)の値をとるとき，Cと線分$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$で囲まれる図形の面積を求めよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$1-3a$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a\sqrt{a}$	↗

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1$ $(0<a<1)$ のとき

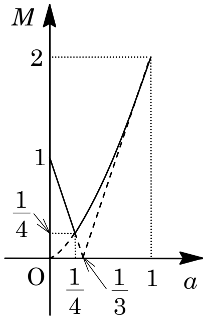
まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\frac{1}{4},\ 1$



これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$

(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1$ $(a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

$\boxed{5}$ ［岡山大］

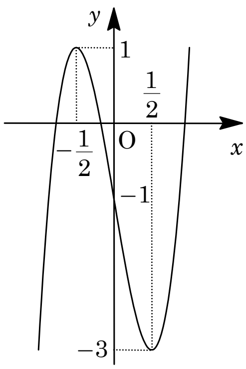
(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2)　$\theta=\dfrac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{9}<\dfrac{2\pi}{3}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{2}>\cos\dfrac{5\pi}{9}>\cos\dfrac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\ f\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\dfrac{1}{5}<a<-\dfrac{1}{6}$，すなわち $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ である。

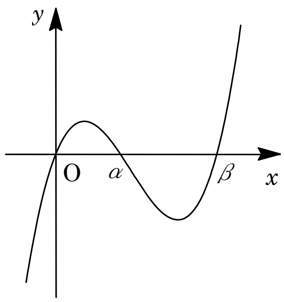
［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

6

［九州大・文］

(1)　曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸と 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ で交わっているので，C は，



$$y = x(x-\alpha)(x-\beta) = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$$

さて，C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とし，$f(x) = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$ とおくと，

$$S = \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta -f(x)dx$$

$$= \int_0^\alpha f(x)dx - \left(\int_0^\beta f(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right)$$

$$= 2\int_0^\alpha f(x)dx - \int_0^\beta f(x)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\alpha - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta$$

$$= 2\left(\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3} + \frac{\alpha^3\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta^4}{4} - \frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3} + \frac{\alpha\beta^3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta + \frac{1}{12}\beta^4 - \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

(2)　β の値を固定し，S を α の関数と考え $S(\alpha)$ と記すと，(1)から，

$$S(\alpha) = -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{\beta}{3}\alpha^3 - \frac{\beta^3}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta^4 \quad (0<\alpha<\beta)$$

$$S'(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \beta\alpha^2 - \frac{\beta^3}{6} = -\frac{1}{6}(4\alpha^3 - 6\beta\alpha^2 + \beta^3)$$

$$= -\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2 - 2\beta\alpha - \beta^2)$$

すると，$\alpha = \frac{\beta}{2}$，$\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$ のとき $S'(\alpha) = 0$ となり，$0<\alpha<\beta$ における $S(\alpha)$ の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

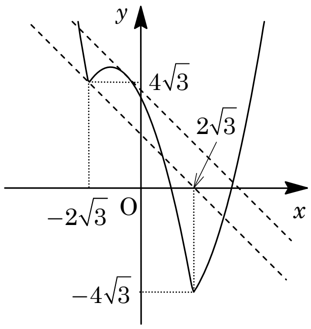
よって，$\alpha = \frac{\beta}{2}$ のとき，S は最小となる。

［解　説］

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　曲線$C : y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - 2x$に対して,



(i)　$\dfrac{1}{2}x^2 - 6 \geqq 0$ $(x \leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3} \leqq x)$のとき

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 8 \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}x^2 - 6 < 0$ $(-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3})$のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 8 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて, 直線$L : y = -x + t$ ……③が点$(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$を通るとき, $t = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$となる。

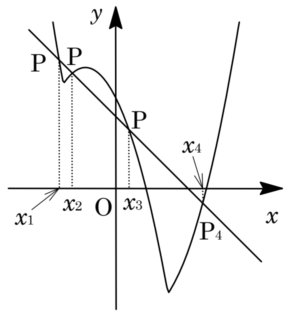
また, Lが放物線②と$x = s$で接するとき, ②から$y' = -x - 2$なので,

$$-s - 2 = -1,\ s = -1$$

すると, 接点$\left(-1,\ \dfrac{15}{2}\right)$となり, このとき$t = -1 + \dfrac{15}{2} = \dfrac{13}{2}$である。

以上より, CとLが異なる4点で交わるtの範囲は, $2\sqrt{3} < t < \dfrac{13}{2}$である。

(2)　CとLが異なる4点P_1, P_2, P_3, P_4で交わるとき, そのx座標をそれぞれx_1, x_2, x_3, x_4とおく。



まず, ①③を連立して, $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = -x + t$となり,

$$x^2 - 2x - 2t - 12 = 0$$

この解が$x = x_1$, x_4より,

$$x_1 + x_4 = 2,\ x_1x_4 = -2t - 12 \cdots\cdots\cdots ④$$

次に, ②③を連立して, $-\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = -x + t$となり,

$$x^2 + 2x + 2t - 12 = 0$$

この解が$x = x_2$, x_3より, $x_2 + x_3 = -2$, $x_2x_3 = 2t - 12 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると, Lの傾きが-1から,

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\ \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right| = \sqrt{2}(x_4 - x_3),\ \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \sqrt{2}(x_3 - x_2)$$

ここで, 条件より, $\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| + \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|}{\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|} = 4$なので, $\dfrac{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3)}{x_3 - x_2} = 4$

$$x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2),\ (x_4 - x_1)^2 = 25(x_3 - x_2)^2$$

$$(x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4 = 25\{(x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して, $4 - 4(-2t - 12) = 25\{4 - 4(2t - 12)\}$となり,

$$1 + 2t + 12 = 25(1 - 2t + 12),\ 52t - 312 = 0$$

よって, 求めるtの値は, $t = 6$である。

(3)　$t=6$ のとき，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=0$ より，$(x_2,\ x_3)=(-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{0}\Big\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\Big\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{6}\Big)(0+2)^3=\frac{2}{3}$$

［解 説］

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ と直線 $y=t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。