1 ［筑波大］

α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

1 ［筑波大］

(1)　$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|=|\alpha|$$

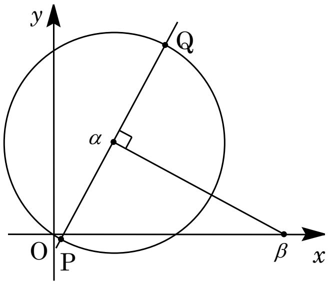
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2)　α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\overline{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線 $(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$$

(3)　$\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\ (\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})=3\alpha\overline{\alpha},\ \beta^2-(\alpha+\overline{\alpha})\beta-2\alpha\overline{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\overline{\alpha})^2+8\alpha\overline{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

［解　説］

現行課程で復活した複素数と図形の問題です。複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。

$\boxed{2}$ ［千葉大］

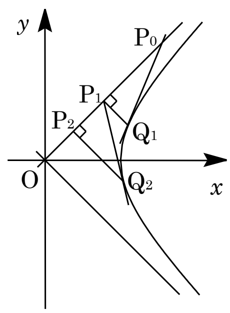
双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ ……①の漸近線 $y = x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0 : (a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0 > 0$) を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1 : (a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2 : (a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n : (a_n,\ a_n)$，$\mathrm{Q}_n$ を定義していく。

(1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を a_0 を用いて表せ。

(3) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］



(1)　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して,

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は,

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより,

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から,

$$b_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n+\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n-\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)$ である。

(2)　点 Q_n における①の接線は，(1)から，$\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\Big)x-\Big(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので,

$$\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}-\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$ である。

(3)　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり,

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2+\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。

$\boxed{3}$　　　　［東京工大］

数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$ に対して，$a_1=5$ から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$$a_3=4-\dfrac{1}{\frac{11}{3}-2}=\dfrac{17}{5},\ \ a_4=4-\dfrac{1}{\frac{17}{5}-2}=\dfrac{23}{7}$$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\dfrac{1}{a_k-2}=4-\dfrac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\dfrac{2k-1}{2k+1}=\dfrac{6k+5}{2k+1}=\dfrac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(2)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\dfrac{1}{2k-1}\Big)$ とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$ となり，

$$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{s_n}{t_n}\leqq\dfrac{3t_n+2n}{t_n}=3+\dfrac{2n}{t_n}=3+\dfrac{4}{n+1}$$

(3)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\dfrac{1}{2k-1}\Big)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$ から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$ となり，(2)から，

$$3<b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$$

よって，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{4}{n+1}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$ である。

［解　説］

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお，(1)は普通に，推測→帰納法のパターンで記していますが，式変形により漸化式を解くことも可能です。

$\boxed{4}$ ［北海道大］

a は実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1) a を t で表せ。

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。

4　［北海道大］

(1)　$C_1 : y=(x-1)e^x$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ ……②に対して，

①より，$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 l は，

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t),\ \ y=te^tx-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2+a=te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2-te^tx+a+(t^2-t+1)e^t=0$$

C_2 と l が接することより，$D=t^2e^{2t}-4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\}=0$ となり，

$$t^2e^{2t+1}-2a-2(t^2-t+1)e^t=0,\ \ a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a=f(t)$ となり，

$$\begin{aligned}f'(t)&=te^{2t+1}+t^2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t\\&=(t+t^2)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t\\&=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1)\end{aligned}$$

ここで，$f'(t)=0$ の解は $t=-1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$t=0$ のとき $f(t)$ すなわち a は，極小値 $f(0)=-1$ をとる。

［解　説］

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

$\boxed{5}$ ［京都大］

(1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) $a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は,

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\quad y=e^tx-(t-1)e^t+1\cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり,

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\quad a=-e^{-t}+t-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり,

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\quad \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2)　条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり,

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot1=n\quad(n\geqq2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

［解　説］

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

6　［東京工大］

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

６　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$に対して，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$$

これより，$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^3(2\cos^2 t-t\cos t\sin t+2\sin^2 t+t\sin t\cos t)=2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2,\ |\vec{v}|=t\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\vec{v}$とのなす角を$\theta(t)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$とすると，

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

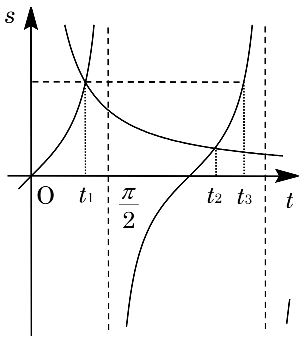
よって，$t\to\infty$のとき$\cos\theta(t)\to 0$より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$である。

(2)　$t>0$において，$\vec{v}$がy軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$から$2\cos t-t\sin t=0$

すなわち，$2\cos t=t\sin t$から，$\cos t\neq 0$となり，

$$\tan t=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$の解は，$s=\tan t$と$s=\dfrac{2}{t}$の交点の t 座標として表せる。そして，正で最も小さいものをt_1，次に小さいものをt_2とすると右図のようになる。



ここで，$t_3=t_1+\pi$とおくと，$t_2<t_3$となるので，

$$t_2-t_1<t_3-t_1=\pi$$

［解　説］

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

$\boxed{7}$ ［名古屋大］

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^x \quad (x \neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

7　　　　［名古屋大］

(1)　$f(x)=x^{-2}2^x=\dfrac{2^x}{x^2}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{2^x\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

これより，$f'(x)>0$ となる条件は，$\dfrac{x\log 2-2}{x}>0$ すなわち $x(x\log 2-2)>0$ から，$x<0$，$\dfrac{2}{\log 2}<x$ である。

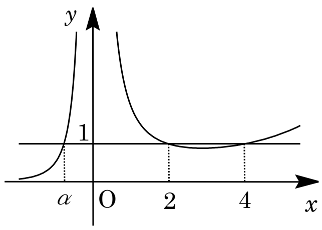
(2)　$x=0$ は方程式 $2^x=x^2$ を満たさないので，この方程式は，$x^{-2}2^x=1$ すなわち $f(x)=1$ と同値である。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

さらに，$f(2)=f(4)=1$ に注意して，$y=f(x)$ と $y=1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって，$f(x)=1$ すなわち $2^x=x^2$ は，相異なる 3 個の実数解 $x=\alpha$，2，4 をもつ。

(3)　まず，方程式 $2^x=x^2$ の解 $x=2$，4 は有理数なので，もう 1 つの負の解 $x=\alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで，α が有理数と仮定し，$\alpha=-\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数)とおくと，

$$2^{-\frac{n}{m}}=\left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n}=\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n}=\frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

m, n は互いに素より，$n^{2m}=1$ ……①，$m^{2m}=2^n$ ……②

①より $n=1$ となり，②に代入すると $m^{2m}=2$ であるが，この式を満たす自然数 m は存在しない。これより，α は有理数でない。

以上より，方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものは $x=2$，4 である。

［解 説］

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが，これを無視して直接的に $y=2^x$ と $y=x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際，$x=2$，4 という解はこちらの方法で見つけていますので。

$\boxed{8}$ ［熊本大］

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①$\times r+$②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}\left|(-1)^n\right|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2)　(1)より，$a_1=\int_0^{\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\dfrac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4)　$f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解　説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

$\boxed{9}$ ［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n\text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n\text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

9　［新潟大］

(1)　$f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\Big(1-\dfrac{t^2}{2}\Big)dt=x-\dfrac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)\,dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$ より $g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$ より $h'(x)\geqq 0$ となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$ において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……(＊)が，すべての自然数 m に対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i)　$m=1$ のとき　(2)より，成り立っている。

(ii)　$m=l$ のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 m に対して(＊)は成り立っている。

(4)　(＊)に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0<\dfrac{\pi}{6}<1$ から，$m\to\infty$ のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 0$ となるので,

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式, 加えて極限を問うものです。記述量は多いですが, 方針に迷いが生ずることはないでしょう。

10　　　　　　［東京大］

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$g(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q$ $\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$から，

(i)　$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii)　$|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$ より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$h(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)dx=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$$

そして，$f(x)$は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -J_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\ \ -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq J_n\leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{e}{1+e}$

［解　説］

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$という$g(x)$と$h(x)$の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

座標平面上の点P(1, 1)を中心とし，原点 O を通る円をC_1とする。k を正の定数として，曲線$y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$をC_2とする。C_1とC_2は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ はx軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

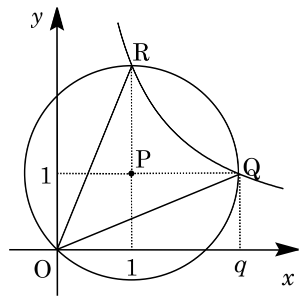
(1) k, q, r の値を求めよ。

(2) 曲線C_2と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分$\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$の値を求めよ。

(4) 円C_1の原点 O を含まない弧 QR と曲線C_2で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］



(1)　円 C_1 は中心 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，C_1 と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)\cdots\cdots ②$は点 Q，R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，$\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。

さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので $\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2)　C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\Big[\log x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3)　$I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4)　円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は，①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

すると，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\,\big)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$
$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\big\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\,\big\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\pi\Big[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\Big(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\Big(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\Big)\pi$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\Big(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\Big)\pi+\pi^2$$

［解　説］

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお，(2)はよく見かけるものです。

$\boxed{12}$ ［千葉大］

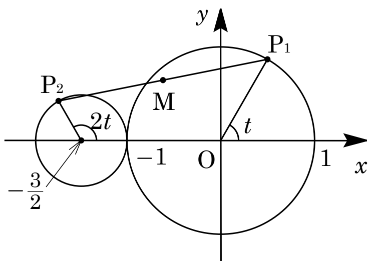
平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

12　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

C_1 は原点中心で半径 1 の円，C_2 は点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ 中心で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である。このとき，時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ において，点 P_1 は C_1 上を点 $(1,\ 0)$ から反時計まわりに一周，点 P_2 は C_2 上を点 $(-1,\ 0)$ から反時計まわりに二周することから，$\mathrm{P}_1(\cos t,\ \sin t)$



$$\mathrm{P}_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

すると，P_1 と P_2 の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin t$$

さて，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，$f(2\pi-t)=f(t)$，$g(2\pi-t)=-g(t)$

これより，点 M の軌跡について，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は x 軸について対称となる。以下，$0\leqq t\leqq\pi$ の場合について，軌跡の概形を調べる。

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin t$$

$$=-\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

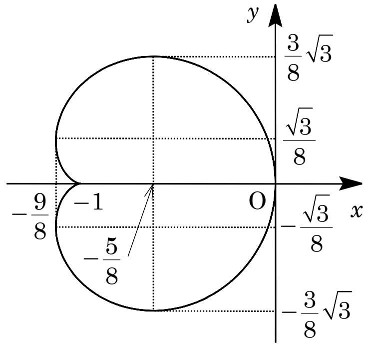
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t$$

$$=\cos\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	0	↘	$-\frac{5}{8}$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	-1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{8}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0

t の値の変化に伴う x,y の値の変化は右表のようになる。

さらに，この $0\leqq t\leqq\pi$ における曲線を x 軸対称し，もとの曲線と合わせた曲線が，求める点 M の軌跡である。図示すると，右図のようになる。



また，M の軌跡によって囲まれる図形の面積 S は，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の曲線部分を $y=y_1$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ の曲線部分を $y=y_2$ とおくと，

$$S=2\int_{-\frac{9}{8}}^{0}y_1\,dx-2\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}y_2\,dx$$

$$=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}g(t)f'(t)dt-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}g(t)f'(t)dt=2\int_{\pi}^{0}g(t)f'(t)dt$$

ここで，$g(t)=\dfrac{1}{4}(\sin 2t+2\sin t)$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(\sin 2t+\sin t)$ から，

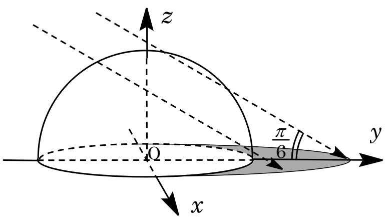
$$
\begin{aligned}
S&=2\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{8}(\sin 2t+2\sin t)(\sin 2t+\sin t)\,dt\\
&=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 2t+3\sin 2t\sin t+2\sin^2 t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4t-3\cos 3t+3\cos t+2-2\cos 2t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(3-\cos 4t-3\cos 3t-2\cos 2t+3\cos t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\Big[\,3t-\frac{\sin 4t}{4}-\sin 3t-\sin 2t+3\sin t\,\Big]_{0}^{\pi}=\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

［解　説］

パラメータ曲線についての微積分です。方針は明確に決まりますが，この問題のように計算量が多いのが，その特徴です。そのため，対称性を把握して，記述量を減らすことがポイントになります。

$\boxed{13}$　［九州大］

座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1)　球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2)　xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3)　$z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　xy 平面上の点 $(x_0,\ y_0,\ 0)$ を通り，方向ベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\ \ (t\text{ は実数})\cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径１の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

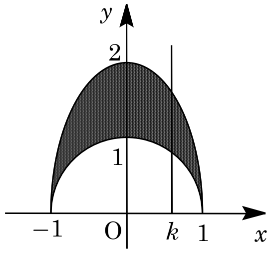
条件より，①と②が $z\geqq0$ すなわち $-t\geqq0\ (t\leqq0)$ で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\ \ -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq0\cdots\cdots⑤$$

④より $4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より $y_0\geqq0$ となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

$$4x^2+y^2=4,\ \ y\geqq0$$

すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線 $x=k$ と領域の境界線 $4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ の交点は，それぞれ $y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$ であるので，求める y 座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq2\sqrt{1-k^2}$

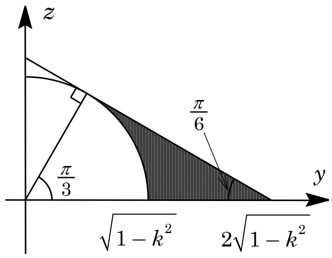


(2)　右図の網点部の面積は，$\dfrac{1}{2}(\pi\cdot1\cdot2-\pi\cdot1^2)=\dfrac{1}{2}\pi$ である。

(3)　球の外で光が当たらない部分を平面 $x=k$ で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。

その面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$



よって，球の外で光が当たらない部分の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

［解　説］

20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

14 ［大阪大］

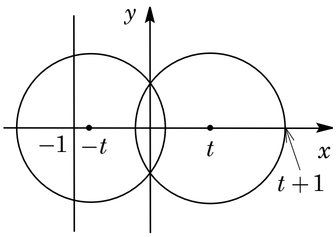
座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。

14 ［大阪大］

(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。



さて，球 A, B の交線は yz 平面上にあるので，$x\geqq-1$ における $A\cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\Big]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\Big]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\Big(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\Big)$

(2) $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0\leqq t\leqq1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$			$\searrow$

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\Big(-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}\Big)+2t+\dfrac{2}{3}$ から，

$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\Big(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\Big)\pi$ である。

［解 説］

阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

$\boxed{15}$ ［東京工大］

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする。

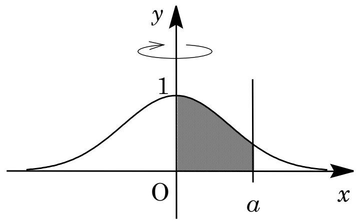
(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

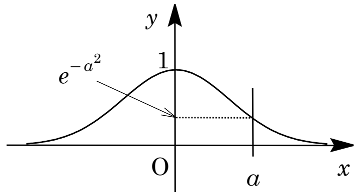
$\boxed{15}$ ［東京工大］

(1) 曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x=a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 A の体積 V は,



$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$
$$=-\pi\left(e^{-a^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

(2) xy 平面に垂直に z 軸をとり, A について平面 $y=k$ で切断したときの切り口を考えると,



(i) $0\leqq k\leqq e^{-a^2}$ のとき

切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$ かつ $y=k$ より,

$$x^2+z^2=a^2\quad(0\leqq y\leqq e^{-a^2})\cdots\cdots\cdots①$$

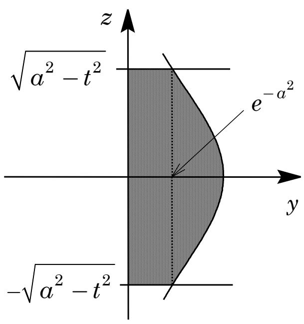
(ii) $e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$ のとき

$y=e^{-x^2}$ を変形すると $x^2=-\log y$, $x\geqq 0$ において $x=\sqrt{-\log y}$ となる。

すると, 切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$ かつ $y=k$ より,

$$x^2+z^2=-\log y\quad(e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$

さて, A を平面 $x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$ で切断すると,



①より, $0\leqq y\leqq e^{-a^2}$ において, $t^2+z^2=a^2$ から,

$$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$$

②より, $e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$ において, $t^2+z^2=-\log y$ から,

$$y=e^{-(z^2+t^2)}$$

よって, 切り口は右図の網点部となる。この面積を $S(t)$ とすると, $-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ から,

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(z^2+t^2)}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3) (2)より, $V=\int_{-a}^{a}S(t)\,dt\leqq\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\Big)dt=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt$

ここで, $I=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ とおくと, $\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt=I\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\,dt=I^2$

よって, $V\leqq I^2$ すなわち $\sqrt{V}\leqq I$ となり, (1)から $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$

［解 説］

回転体 A をいったん立式した後, 平面 $x=t$ によって切断し, その切り口を図示するというやや迂遠な解法で記しています。