1 ［熊本大］

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$をrを用いて表せ。

(4) (3)で求めたrの式を$f(r)$とおく。$\lim_{r\to+0}rf(r)$を求めよ。

2　　［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad(n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad(n \text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq \dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq \dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東京大］

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

1　　［熊本大］

(1)　$a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}|(-1)^n|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2)　(1)より，$a_1=\int_0^{\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4)　$f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解　説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x\Big(1-\dfrac{t^2}{2}\Big)dt=x-\dfrac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$より$g'(x)\geqq 0$となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$より$h'(x)\geqq 0$となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$のとき，不等式$-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……(＊)が，すべての自然数mに対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i)　$m=1$のとき　(2)より，成り立っている。

(ii)　$m=l$のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数mに対して(＊)は成り立っている。

(4)　(＊)に$x=\dfrac{\pi}{6}$を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0<\dfrac{\pi}{6}<1$ から，$m\to\infty$ のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解　説］

定積分と不等式，加えて極限を問うものです。記述量は多いですが，方針に迷いが生ずることはないでしょう。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ ($|x|\leqq 1$ のとき)，$g(x)=0$ ($|x|>1$ のとき) より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q$ $\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$から，

(i)　$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii)　$|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ ($|x|\leqq 1$ のとき)，$h(x)=0$ ($|x|>1$ のとき) より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)dx=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$$

そして，$f(x)$は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -J_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\ -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq J_n\leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{e}{1+e}$

［解　説］

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$という$g(x)$と$h(x)$の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。