1　　　　［千葉大］

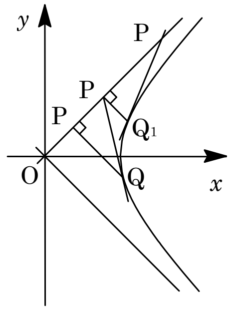
双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$（ただし $a_0>0$）を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

1　　　　［千葉大］



(1)　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して,

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1 \cdots\cdots\cdots ③$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は,

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより,

$$2a_n=b_n+c_n \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から,

$$b_n=\frac{1}{2}\left(2a_n+\frac{1}{2a_n}\right)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\left(2a_n-\frac{1}{2a_n}\right)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)$ である。

(2)　点 Q_n における①の接線は, (1)から，$\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\right)x-\left(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので,

$$\left(a_n+\frac{1}{4a_n}\right)a_{n-1}-\left(a_n-\frac{1}{4a_n}\right)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

(3)　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり,

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\left(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\right)^2+\left(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。