

1

[東北大・文]

$a > 0$  を実数とする。関数  $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$  の  $0 \leq t \leq 1$  における最大値を  $M(a)$  とする。

- (1)  $M(a)$  を求めよ。
- (2) 実数  $x > 0$  に対し、 $g(x) = M(x)^2$  とおく。 $xy$  平面において、関数  $y = g(x)$  のグラフに点  $(s, g(s))$  で接する直線が原点を通るとき、実数  $s > 0$  とその接線の傾きを求めよ。
- (3)  $a$  が正の実数全体を動くとき、 $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$  の最小値を求めよ。

1

[東北大・文]

(1)  $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$  に対して,  $f'(t) = -12t^2 + a+3$

$a > 0$  より,  $f'(t) = 0$  の解は  $t = \pm \sqrt{\frac{a+3}{12}}$  となる。

(i)  $\sqrt{\frac{a+3}{12}} < 1$  ( $0 < a < 9$ ) のとき

$0 \leq t \leq 1$  における  $f(t)$  の増減は右表のようになる。これより,  $f(t)$  は  $t = \sqrt{\frac{a+3}{12}}$  にお

$t$	0	...	$\sqrt{\frac{a+3}{12}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

いて最大値  $M(a)$  をとり,

$$M(a) = \sqrt{\frac{a+3}{12}} \left( -4 \cdot \frac{a+3}{12} + a+3 \right) = \frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(a+3) = \frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)  $\sqrt{\frac{a+3}{12}} \geq 1$  ( $a \geq 9$ ) のとき

$0 \leq t \leq 1$  において  $f(t)$  は単調増加するので,  $t=1$  において最大値  $M(a)$  をとり,

$$M(a) = -4 + (a+3) = a-1$$

(2)  $g(x) = M(x)^2$  より, (1) から,

$$g(x) = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{27}(x+3)^3 \quad (0 < x < 9)$$

$$g(x) = (x-1)^2 \quad (x \geq 9)$$

さて, 点  $(s, g(s))$  で接する直線が原点を通るより,

$$\frac{g(s)}{s} = g'(s) \cdots \cdots (*)$$

(i)  $0 < s < 9$  のとき

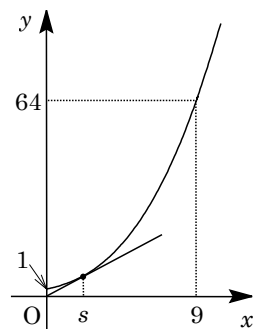
(\*)より,  $\frac{1}{27} \cdot \frac{(s+3)^3}{s} = \frac{1}{9}(s+3)^2$  から  $s+3 = 3s$  となり,  $s = \frac{3}{2}$

(ii)  $s \geq 9$  のとき (\*)より,  $\frac{(s-1)^2}{s} = 2(s-1)$  から  $s = -1$  となるが, 成立しない。

(i)(ii)より,  $s = \frac{3}{2}$  となり, このとき接線の傾きは,  $\frac{1}{9} \left( \frac{3}{2} + 3 \right)^2 = \frac{9}{4}$  である。

(3)  $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$  より,  $k^2 = \frac{M(a)^2}{a} = \frac{g(a)}{a}$  となり,  $k^2$  は原点  $O$  と点  $(a, g(a))$  を結ぶ直線の傾きとなる。

すると, (2)より  $k^2$  の最小値は  $\frac{9}{4}$  となるので,  $k$  の最小値は  $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$  である。



### [解説]

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

2

[東京医歯大]

実数  $a, b$  に対し,  $f(x) = x^3 - 3ax + b$  とおく。  $-1 \leq x \leq 1$  における  $|f(x)|$  の最大値を  $M$  とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $a > 0$  のとき,  $f(x)$  の極値を  $a, b$  を用いて表せ。
- (2)  $b \geq 0$  のとき,  $M$  を  $a, b$  を用いて表せ。
- (3)  $a, b$  が実数全体を動くとき,  $M$  のとりうる値の範囲を求めよ。

2

[東京医歯大]

(1)  $f(x) = x^3 - 3ax + b$  とおくと,  $a > 0$  のとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a) \\ &= 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

これより,  $f(x)$  の増減は右表のよう

$x$	...	$-\sqrt{a}$	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

になる。

よって, 極大値  $f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + b$ , 極小値  $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + b$  である。(2) まず,  $f(x) + f(-x) = 2b$  より,  $y = f(x)$  のグラフは点  $(0, b)$  に関して対称である。そして,  $-1 \leq x \leq 1$  における  $|f(x)|$  の最大値を  $M$  とすると,  $b \geq 0$  の場合は,(i)  $a > 0$  のとき (1)より  $y = f(x)$  は右図のようになり,(i-i)  $\sqrt{a} > 1$  ( $a > 1$ ) のとき

$$M = |f(-1)| = f(-1) = -1 + 3a + b$$

(i-ii)  $\sqrt{a} \leq 1 < 2\sqrt{a}$  ( $\frac{1}{4} < a \leq 1$ ) のとき

$$M = |f(-\sqrt{a})| = f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + b$$

(i-iii)  $2\sqrt{a} \leq 1$  ( $0 < a \leq \frac{1}{4}$ ) のとき

$$M = |f(1)| = f(1) = 1 - 3a + b$$

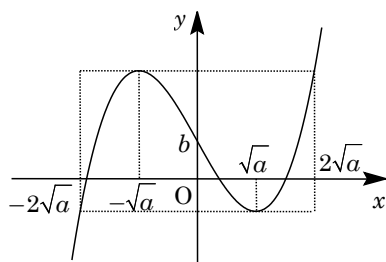
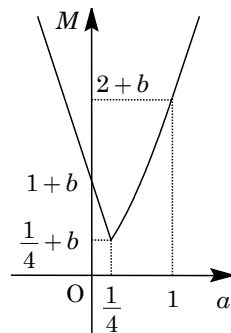
(ii)  $a \leq 0$  のとき  $f'(x) \geq 0$  より  $f(x)$  は単調増加し,

$$M = |f(1)| = f(1) = 1 - 3a + b$$

(i)(ii)より,  $|f(x)|$  の最大値  $M$  は,

$$M = -1 + 3a + b \quad (a > 1), \quad M = 2a\sqrt{a} + b \quad \left(\frac{1}{4} < a \leq 1\right)$$

$$M = 1 - 3a + b \quad \left(a \leq \frac{1}{4}\right)$$

(3)  $b \geq 0$  のとき,  $b$  の値を固定して,  $a, M$  の関係を図示すると, 右図のようになり,  $b$  が  $b \geq 0$  で動くとき,  $M \geq \frac{1}{4}$  である。また,  $b < 0$  のとき, (2)と同様にすると,(i)  $a > 1$  のとき  $M = |f(1)| = -f(1) = -1 + 3a - b$ (ii)  $\frac{1}{4} < a \leq 1$  のとき  $M = |f(\sqrt{a})| = -f(\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} - b$ (iii)  $a \leq \frac{1}{4}$  のとき  $M = |f(-1)| = -f(-1) = 1 - 3a - b$ (i)~(iii)より,  $b$  が  $b < 0$  で動くとき,  $M > \frac{1}{4}$  である。以上より,  $a, b$  が実数全体を動くとき,  $M$  のとりうる範囲は  $M \geq \frac{1}{4}$  である。

**[解説]**

よく見かける 3 次関数の増減に関する問題ですが、絶対値をとる設定のため、複雑になっています。なお、上のグラフに破線で長方形を書き込んでいますが、この知識が方針を立てるうえで、ポイントになります。

3

[九州大・理]

$C_1, C_2$  をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x \quad (0 \leq x \leq 2), \quad C_2 : y = -x^2 - 2x \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

また,  $a$  を実数とし, 直線  $y = a(x+4)$  を  $l$  とする。

(1) 直線  $l$  と  $C_1$  が異なる 2 つの共有点をもつための  $a$  の値の範囲を求めよ。

以下,  $a$  が(1)の条件を満たすとする。このとき,  $l$  と  $C_1$  で囲まれた領域の面積を  $S_1$ ,  $x$  軸と  $C_2$  で囲まれた領域で  $l$  の下側にある部分の面積を  $S_2$  とする。

(2)  $S_1$  を  $a$  を用いて表せ。

(3)  $S_1 = S_2$  を満たす実数  $a$  が  $0 < a < \frac{1}{5}$  の範囲に存在することを示せ。

3

[九州大・理]

- (1)
- $C_1: y = -x^2 + 2x$
- (
- $0 \leq x \leq 2$
- ) と
- $l: y = a(x+4)$
- の

式を連立すると、 $-x^2 + 2x = a(x+4)$  から、

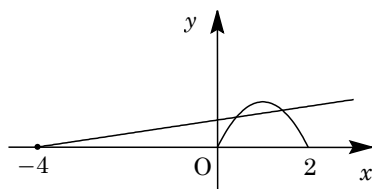
$$x^2 + (a-2)x + 4a = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $l$  と  $C_1$  が  $0 < x < 2$  で接する条件は、 $\textcircled{1}$  より、

$$D = (a-2)^2 - 16a = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$0 < -\frac{a-2}{2} < 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$  より、 $a^2 - 20a + 4 = 0$ 、 $a = 10 \pm 4\sqrt{6}$  となり、 $\textcircled{3}$  から  $-2 < a < 2$  なので、満たす  $a$  の値は、 $a = 10 - 4\sqrt{6}$  である。したがって、 $l$  と  $C_1$  が異なる 2 つの共有点をもつ条件は、右上図より、 $0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6}$  である。



- (2)
- $\textcircled{1}$
- の解
- $x = \frac{-(a-2) \pm \sqrt{a^2 - 20a + 4}}{2}$
- を、
- $x = \alpha, \beta$
- (
- $\alpha < \beta$
- ) とおくと、
- $l$
- と
- $C_1$
- で囲まれた領域の面積を
- $S_1$
- は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + 2x - a(x+4)\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 - 20a + 4})^3 \end{aligned}$$

- (3) まず、
- $x$
- 軸と
- $C_1$
- で囲まれた領域の面積は、

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

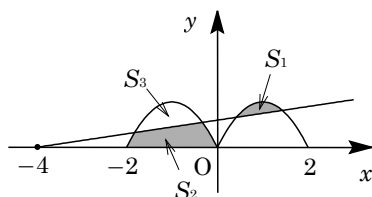
次に、 $C_1$  と  $y$  軸対称である  $C_2: y = -x^2 - 2x$ ( $-2 \leq x \leq 0$ ) と  $l: y = a(x+4)$  の式を連立すると、 $x^2 + (a+2)x + 4a = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$ 

ここで、 $l$  と  $C_2$  で囲まれた領域の面積を  $S_3$  とおき、(2) と同様にすると、 $\textcircled{4}$  の解が  $x = \frac{-(a+2) \pm \sqrt{a^2 - 12a + 4}}{2}$  より、 $S_3 = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 - 12a + 4})^3$  となる。

さて、条件より  $x$  軸と  $C_2$  で囲まれた領域で  $l$  の下側にある部分の面積  $S_2$  に対し、 $F(a) = S_1 - S_2$  とおくと、 $S_2 = \frac{4}{3} - S_3$  より、

$$F(a) = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 - 20a + 4})^3 + \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 - 12a + 4})^3 - \frac{4}{3}$$

すると、 $F(0) = \frac{4}{3} > 0$ 、 $F\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1+41\sqrt{41}}{5^3} - 8\right) < 0$  より、 $F(a) = 0$  すなわち  $S_1 = S_2$  を満たす実数  $a$  が  $0 < a < \frac{1}{5}$  の範囲に存在する。



## [解説]

$10 - 4\sqrt{6} \doteq 0.202$  より、(3)の結論は、図からほとんど明らかなのですが……。

4

[一橋大]

座標平面上の原点を  $O$  とする。点  $A(a, 0)$ , 点  $B(0, b)$  および点  $C$  が,  $OC = 1$ ,  $AB = BC = CA$  を満たしながら動く。

- (1)  $s = a^2 + b^2$ ,  $t = ab$  とする。 $s$  と  $t$  の関係を表す等式を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積のとりうる値の範囲を求めよ。



4

[一橋大]

- (1)
- $C(p, q)$
- とおくと,
- $OC=1$
- から,
- $p^2+q^2=1$
- …………①

また,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ に対し,  $AB=BC=CA$ より,

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2$$
…………②,  $a^2+b^2=(p-a)^2+q^2$ …………③

$$\text{①②より, } a^2=1-2bq \text{ となり, } b \neq 0 \text{ のとき } q=\frac{1-a^2}{2b}$$
…………④

$$\text{①③より, } b^2=1-2ap \text{ となり, } a \neq 0 \text{ のとき } p=\frac{1-b^2}{2a}$$
…………⑤

$$\text{④⑤を①に代入すると, } \frac{(1-b^2)^2}{4a^2} + \frac{(1-a^2)^2}{4b^2} = 1 \text{ となり,}$$

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2$$
…………⑥

なお,  $b=0$ のときは $a=\pm 1$ ,  $a=0$ のときは $b=\pm 1$ となるが, この場合も⑥はともに成立し, 左辺を展開すると,

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで,  $s=a^2+b^2$ ,  $t=ab$ とすると,

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2, \quad s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$ のとき $a=b=0$ , そして②から $p=q=0$ となり不適なので,  $s \neq 0$ から,

$$s^2-3t^2-2s+1=0$$
…………⑦

- (2)
- $\triangle ABC$
- は正三角形なので, その面積を
- $S$
- とおくと,

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})^2 \sin \frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s$$
…………⑧

$$\text{さて, ⑦より } (s-1)^2-3t^2=0 \text{ から, } s=1 \pm \sqrt{3}t$$
…………⑨

また,  $s=(a+b)^2-2ab$ から,  $(a+b)^2=s+2t$ となり,  $s+2t \geq 0$ …………⑩で,

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

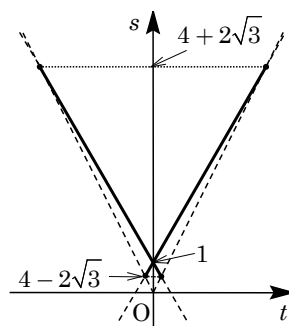
すると,  $a, b$ は, 2次方程式 $x^2 \mp \sqrt{s+2t}x+t=0$ の2つの解となり,

$$D=(s+2t)-4t=s-2t \geq 0$$
…………⑪

⑨かつ⑩かつ⑪を $ts$ 平面上に図示すると, 右図の実線部となる。

これより,  $4-2\sqrt{3} \leq s \leq 4+2\sqrt{3}$ となり, ⑧から,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3}) \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}), \quad \sqrt{3}-\frac{3}{2} \leq S \leq \sqrt{3}+\frac{3}{2}$$



## [解説]

(2)では図をかいて $s$ の範囲を求めましたが, ⑨より $t$ を消去しても可能です。

5

[名古屋大・文]

座標平面上の円  $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$  と、 $x$  軸上の 2 点  $P(-a, 0)$ ,  $Q(b, 0)$  を考える。ただし、 $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $ab \neq 1$  とする。点  $P, Q$  のそれぞれから  $C$  に  $x$  軸とは異なる接線を引き、その 2 つの接線の交点を  $R$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $QR$  の方程式を求めよ。
- (2)  $R$  の座標を  $a, b$  で表せ。
- (3)  $R$  の  $y$  座標が正であるとき、 $\triangle PQR$  の周の長さを  $T$  とする。 $T$  を  $a, b$  で表せ。
- (4) 2 点  $P, Q$  が、条件「 $PQ = 4$  であり、 $R$  の  $y$  座標は正である」を満たしながら動くとき、 $T$  を最小とする  $a$  の値とそのときの  $T$  の値を求めよ。

5

[名古屋大・文]

- (1) 直線 QR は  $x$  軸に平行でないので、その法線ベクトルの成分を  $(1, m)$  とおくと、その方程式は、

$$(x-b)+my=0, \quad x+my-b=0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- ①は、円  $C: x^2+(y-1)^2=1$  に接することより、

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1, \quad (m-b)^2=1+m^2$$

よって、 $2bm=b^2-1$  より、 $m=\frac{b^2-1}{2b}$  となり、①に代入すると、

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0, \quad 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (2) 直線 PR の方程式は、(1)の結果から、 $-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

- ②③を連立すると、 $\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$  となり、

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b), \quad y=\frac{2ab}{ab-1} \quad (ab \neq 1, a+b > 0)$$

- ②に代入すると、 $2bx+\frac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$  となり、

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0, \quad x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより、 $R\left(\frac{a-b}{ab-1}, \frac{2ab}{ab-1}\right)$  である。

- (3) R の  $y$  座標が正より、 $\frac{2ab}{ab-1} > 0$  すなわち  $ab > 1$  であり、このとき、

$$QR^2 = \left(\frac{a-b}{ab-1}-b\right)^2 + \left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2 = \frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2} = \frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって、 $QR = \frac{a(1+b^2)}{ab-1}$  となり、同様にすると  $PR = \frac{b(1+a^2)}{ab-1}$  となる。

そこで、 $\triangle PQR$  の周の長さを  $T$  とすると、 $PQ = a+b$  より、

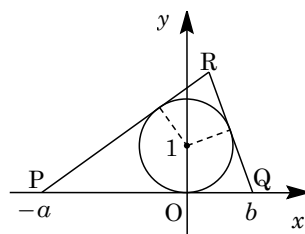
$$T = a+b + \frac{a(1+b^2)}{ab-1} + \frac{b(1+a^2)}{ab-1} = \frac{2ab(a+b)}{ab-1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

- (4)  $PQ = 4$  で R の  $y$  座標が正より、 $a+b=4$ 、 $ab > 1$  である。

ここで、 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 2$  より  $ab \leq 4$  となり、 $1 < ab \leq 4$  である。すると、④から、

$$T = \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8}{1-\frac{1}{ab}} \geq \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}$$

これより、 $ab=4$  ( $a=b=2$ ) のとき  $T$  は最小値  $\frac{32}{3}$  をとる。



### [解説]

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

6

[東京大・文]

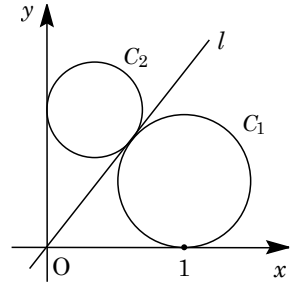
$l$  を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに, 以下の3条件(i), (ii), (iii)で定まる円  $C_1$ ,  $C_2$  を考える。

(i) 円  $C_1$ ,  $C_2$  は2つの不等式  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  で定まる領域に含まれる。

(ii) 円  $C_1$ ,  $C_2$  は直線  $l$  と同一点で接する。

(iii) 円  $C_1$  は  $x$  軸と点  $(1, 0)$  で接し, 円  $C_2$  は  $y$  軸と接する。

円  $C_1$  の半径を  $r_1$ , 円  $C_2$  の半径を  $r_2$  とする。  $8r_1 + 9r_2$  が最小となるような直線  $l$  の方程式と, その最小値を求めよ。



6

[東京大・文]

円  $C_1$  と  $x$  軸, 円  $C_2$  と  $y$  軸,  $C_1$  と  $C_2$  の接点を, それぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $T$  とおくと,  $OB = OT = OA = 1$  より,  $B(0, 1)$  となる。

すると, 円  $C_1$  の半径  $r_1$ , 円  $C_2$  の半径  $r_2$  より, 円  $C_1$  の中心  $C_1(1, r_1)$ , 円  $C_2$  の中心  $C_2(r_2, 1)$  と表せる。

ここで, 円  $C_1$  と  $C_2$  が接する条件は,  $C_1C_2 = r_1 + r_2$  より,

$$\sqrt{(r_2 - 1)^2 + (1 - r_1)^2} = r_1 + r_2$$

これより,  $(r_2 - 1)^2 + (1 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2$  となり,

$$r_1 r_2 + r_1 + r_2 = 1, \quad (1 + r_1)r_2 = 1 - r_1, \quad r_2 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1} \dots\dots(*)$$

よって,  $0 < r_1 < 1$  のもとで,  $(*)$  から,

$$\begin{aligned} 8r_1 + 9r_2 &= 8r_1 + \frac{9 - 9r_1}{1 + r_1} = 8r_1 + \frac{-9(1 + r_1) + 18}{1 + r_1} = 8r_1 - 9 + \frac{18}{1 + r_1} \\ &= 8 + 8r_1 + \frac{18}{1 + r_1} - 17 = 8(1 + r_1) + \frac{18}{1 + r_1} - 17 \end{aligned}$$

そこで, 相加平均と相乗平均の関係を用いて,

$$8(1 + r_1) + \frac{18}{1 + r_1} - 17 \geq 2\sqrt{8(1 + r_1) \cdot \frac{18}{1 + r_1}} - 17 = 2\sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 3^2} - 17 = 7$$

等号は,  $8(1 + r_1) = \frac{18}{1 + r_1}$  すなわち  $1 + r_1 = \frac{3}{2}$  ( $r_1 = \frac{1}{2}$ ) のとき成り立ち, この値は

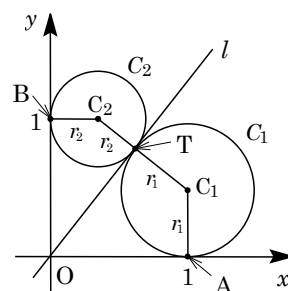
$0 < r_1 < 1$  を満たしている。

以上より,  $8r_1 + 9r_2$  の最小値は 7 である。

このとき,  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $(*)$  から  $r_2 = \frac{1}{3}$  となり,  $C_1(1, \frac{1}{2})$ ,  $C_2(\frac{1}{3}, 1)$  である。そして, 接点  $T$  は線分  $C_1C_2$  を  $r_1 : r_2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$  に内分する点より,  $T(p, q)$  とおくと,

$$p = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

よって, 線分  $OT$  の傾きは  $\frac{q}{p} = \frac{4}{3}$  となり, 直線  $l$  の方程式は  $y = \frac{4}{3}x$  である。



### [解説]

解法のポイントは, 冒頭に記した点  $B$  の  $y$  座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ, ここを外すとシビアナ結果になります。なお, 分数関数の微分法は範囲外ですので, 最小値を求める際には, 相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

7

[東京大・文]

座標平面上の2点  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, -1)$  を考える。また,  $P$  を座標平面上の点とし, その  $x$  座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点  $P$  の範囲を図示し, その面積を求めよ。

- (i) 頂点の  $x$  座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで, 点  $A, P, B$  をすべて通るものがある。
- (ii) 点  $A, P, B$  は同一直線上にある。

7

[東京大・文]

2点  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, -1)$  および点  $P(x, y)$  ( $|x| \leq 1$ ) に対して, まず条件(ii)から, 点  $A, P, B$  は同一直線上にあることより, 点  $P$  の範囲は,  $y = -x$  ( $|x| \leq 1$ ) である。

次に, 条件(i)から, 2次関数を  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) ……①とおくと, 2点  $A, B$  を通ることより,

$$a - b + c = 1 \cdots \cdots \text{②}, \quad a + b + c = -1 \cdots \cdots \text{③}$$

②③より,  $b = -1$ ,  $c = -a$  となり, ①に代入すると,

$$y = ax^2 - x - a = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - a - \frac{1}{4a} \cdots \cdots \text{④}$$

すると, 頂点の  $x$  座標の絶対値が 1 以上より,  $\left|\frac{1}{2a}\right| \geq 1$  から  $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$  ……⑤

そこで, 点  $P$  の範囲は, ⑤の条件のもとで曲線④の  $|x| \leq 1$  における通過領域である。

まず, ④を  $(x^2 - 1)a - (x + y) = 0$  ……⑥と変形すると, 点  $P(x, y)$  の範囲を表す不等式は, この  $a$  についての方程式⑥が, ⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)  $x = \pm 1$  のとき  $x + y = 0$  のとき, 任意の  $a$  に対して⑥は成立するので,

$$(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$$

(b)  $x \neq \pm 1$  のとき ⑥より  $a = \frac{x+y}{x^2-1}$  となり, ⑤に代入すると,  $0 < \left|\frac{x+y}{x^2-1}\right| \leq \frac{1}{2}$

$$0 < |x+y| \leq \frac{1}{2}|x^2-1|, \quad 0 < |x+y| \leq -\frac{1}{2}(x^2-1) \quad (|x| \leq 1)$$

(b-i)  $x + y > 0$  のとき  $x + y \leq -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$  より,

$$y \leq -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$$

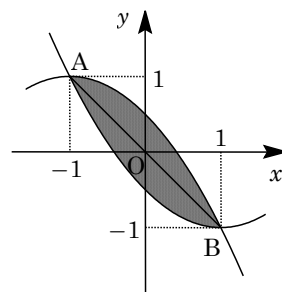
(b-ii)  $x + y < 0$  のとき  $-x - y \leq -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$  より,

$$y \geq \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$$

以上より, 条件(i)または(ii)を満たす点  $P$  の範囲は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。

この領域の面積を  $S$  とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right) \right\} dx \\ &= -\int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx = \frac{1}{6}(1+1)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



### [解説]

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

8

[筑波大・理]

半径 1 の円を内接円とする三角形  $ABC$  が、辺  $AB$  と辺  $AC$  の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  と内接円の接点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とする。また、 $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$  とし、三角形  $ABC$  の面積を  $S$  とする。

- (1) 線分  $AQ$  の長さを  $\alpha$  を用いて表し、線分  $QC$  の長さを  $\beta$  を用いて表せ。
- (2)  $t = \tan \frac{\beta}{2}$  とおく。このとき、 $S$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 不等式  $S \geq 3\sqrt{3}$  が成り立つことを示せ。さらに、等号が成立するのは、三角形  $ABC$  が正三角形のときに限ることを示せ。



8

[筑波大・理]

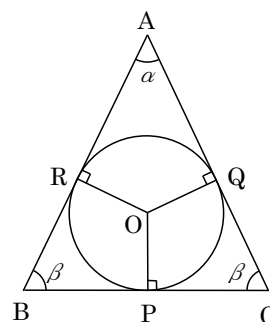
- (1) 二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおく

と,  $\triangle AOQ$  において,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{AQ}, \quad AQ = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\triangle COQ \text{ において同様に, } QC = \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}}$$

- (2) まず,
- $BC = 2PC = 2QC = \frac{2}{\tan \frac{\beta}{2}} = \frac{2}{t}$



また, A, O, P は同一直線上にあるので,

$$AP = PC \tan \beta = QC \tan \beta = \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2}{1 - t^2}$$

$$\text{よって, } \triangle ABC \text{ の面積 } S \text{ は, } S = \frac{1}{2} BC \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t} \cdot \frac{2}{1 - t^2} = \frac{2}{t(1 - t^2)}$$

- (3)
- $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi - \alpha}{4}$
- より
- $0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$
- となり,
- $0 < \tan \frac{\beta}{2} < 1$
- すなわち
- $0 < t < 1$
- である。

さて,  $f(t) = t(1 - t^2)$  とおくと,  $S = \frac{2}{f(t)}$  となり,

$$f'(t) = 1 - 3t^2$$

すると,  $f(t)$  の増減は右表のようになり, $0 < t < 1$  において  $0 < f(t) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$  であり,

$$S \geq 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$t$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

等号が成り立つのは,  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ( $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ) のときなので,  $\beta = \frac{\pi}{3}$  である。このとき  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  となり,  $\triangle ABC$  は正三角形である。

## [解 説]

三角比と図形についての基本問題です。加えて, 最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

9

[京都大]

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

- (a) 少なくとも 2 つの内角は  $90^\circ$  である。
- (b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

9

[京都大]

四角形 ABCD について、その内接円の中心を O、また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より、 $90^\circ$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)  $90^\circ$ の内角が隣り合う ( $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ) のとき

右図のように  $\angle COQ = \angle COR = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) とおくと、 $\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$  となる。これより、四角形 ABCD の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan(90^\circ - \theta) \\ &= 2 + \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \geq 2 + 2\sqrt{\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta}} = 4 \end{aligned}$$

等号成立は  $\tan \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  ( $\theta = 45^\circ$ ) のときであり、このとき四角形 ABCD は正方形

となる。

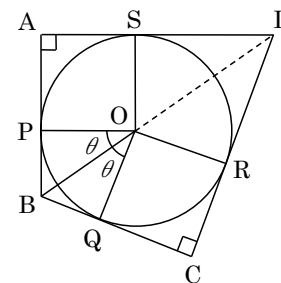
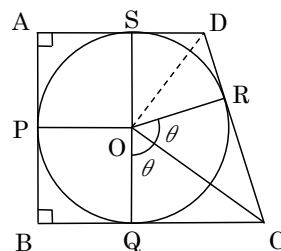
(ii)  $90^\circ$ の内角が向かい合う ( $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ) のとき

右図のように  $\angle BOP = \angle BOQ = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) とおくと、 $\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$  となる。これより、四角形 ABCD の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \theta + 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan(90^\circ - \theta) \\ &= 2 + \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

(i)と同様に、四角形 ABCD が正方形のとき  $S$  は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より、四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。



### [解説]

いったん 2 つの場合に分けましたが、計算を進めていくと、同じものとなります。そして、結論は予想通りとなりました。

**10**

[東北大]

$t > 0$  を実数とする。座標平面において、3点  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $P(t, \sqrt{3}t)$  を頂点とする三角形  $ABP$  を考える。

- (1) 三角形  $ABP$  が鋭角三角形となるような  $t$  の範囲を求めよ。
- (2) 三角形  $ABP$  の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺  $AB$ ,  $BP$ ,  $PA$  の中点をそれぞれ  $M$ ,  $Q$ ,  $R$  とおく。 $t$  が(1)で求めた範囲を動くとき、三角形  $ABP$  を線分  $MQ$ ,  $QR$ ,  $RM$  で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。

10

[東北大]

(1)  $t > 0$  のとき  $\angle PAB < \frac{\pi}{2}$  であるので,  $\triangle APB$  が鋭角三

角形となる条件は  $\angle PBA < \frac{\pi}{2}$  かつ  $\angle APB < \frac{\pi}{2}$  である。

すると,  $t < 2$  かつ  $OP > 2$  ( $2t > 2$ ) となる。

よって, 求める  $t$  の範囲は,  $1 < t < 2$  である。

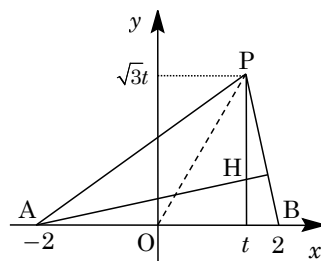
(2) P から辺 AB に引いた垂線の式は,  $x = t$  ……………①

また,  $\overline{BP} = (t-2, \sqrt{3}t)$  より, A から辺 BP に引いた垂線の式は,

$$(t-2)(x+2) + \sqrt{3}ty = 0 \dots\dots\dots ②$$

$$①② \text{を連立して, } (t-2)(t+2) + \sqrt{3}ty = 0 \text{ より, } y = \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$$

よって,  $\triangle APB$  の垂心 H の座標は,  $(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t})$  である。



(3) M, Q, R は, それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので,

$$RQ \parallel AB, QM \parallel PA, RM \parallel PB$$

ここで, H は  $\triangle APB$  の垂心より,

$$PH \perp RQ, BH \perp QM, AH \perp RM \dots\dots\dots ③$$

さて,  $xy$  平面に垂直に  $z$  軸をとり,  $\triangle ABP$  を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において, P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると, ③より,  $s$  を正の実数として,  $C(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}, s)$  と表せる。

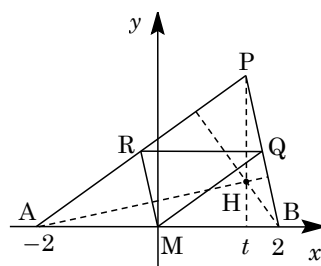
そこで,  $CM = 2$  から,  $t^2 + (\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t})^2 + s^2 = 4$  となり,

$$s^2 = 4 - t^2 - \frac{(4-t^2)^2}{3t^2} = \frac{-4t^4 + 20t^2 - 16}{3t^2}$$

よって,  $s = \frac{2\sqrt{-t^4 + 5t^2 - 4}}{\sqrt{3}t}$  となり, 四面体 CMQR の体積を  $V$  とすると,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \triangle ABP\right) s = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t \cdot \frac{2\sqrt{-t^4 + 5t^2 - 4}}{\sqrt{3}t} = \frac{1}{3} \sqrt{-(t^2 - \frac{5}{2})^2 + \frac{9}{4}}$$

$1 < t < 2$  から,  $t^2 = \frac{5}{2}$  ( $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ) のとき,  $V$  は最大値  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}$  をとる。



### [解 説]

一見, 無関係と思える(2)と(3)ですが, (2)は(3)に不可欠な誘導です。なお, 直角三角形が題材になっている類題が, 北大で 2009 年に出ています。

**11**

[大阪大・文]

平面上に長さ 2 の線分  $AB$  を直径とする円  $C$  がある。2 点  $A, B$  を除く  $C$  上の点  $P$  に対し、 $AP = AQ$  となるように線分  $AB$  上の点  $Q$  をとる。また、直線  $PQ$  と円  $C$  の交点のうち、 $P$  でない方を  $R$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle AQR$  の面積を  $\theta = \angle PAB$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  を動かして  $\triangle AQR$  の面積が最大になるとき、 $\overline{AR}$  を  $\overline{AB}$  と  $\overline{AP}$  を用いて表せ。

11

[大阪大・文]

- (1)
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- のとき,
- $AB$
- が直径なので
- $\angle APB = \frac{\pi}{2}$
- より,

$$AP = AB \cos \theta = 2 \cos \theta$$

すると, 条件より,  $AQ = 2 \cos \theta$ ,  $BQ = 2 - 2 \cos \theta$

また,  $\angle AQP = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$  から,

$$PQ = 2AQ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 4 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2}$$

ここで, 方べきの定理より,  $PQ \cdot RQ = AQ \cdot BQ$  となり,

$$4 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \cdot RQ = 2 \cos \theta (2 - 2 \cos \theta), \quad RQ = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

そこで,  $\triangle AQR$  の面積を  $S$  とすると,  $\angle AQR = \pi - \angle AQP = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$  より,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

- (2) (1)より,
- $S$
- が最大になるのは,
- $\sin 2\theta = 1$
- すなわち
- $\theta = \frac{\pi}{4}$
- のときである。

このとき,  $PQ : QR = 4 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{8} : 2 \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} : 1$  となり, 点  $R$  は線分  $PQ$  を  $(\sqrt{2} + 1) : 1$  に外分することより,

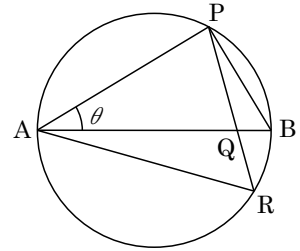
$$\overrightarrow{AR} = \frac{-\overrightarrow{AP} + (\sqrt{2} + 1)\overrightarrow{AQ}}{(\sqrt{2} + 1) - 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AP} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AQ}$$

また,  $AQ = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$  から,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$  となるので,

$$\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AP} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{\sqrt{2} + 1}{2}\overrightarrow{AB}$$

## [解説]

よく見かける構図の三角関数の図形への応用問題です。上記以外にも, いろいろな解法が考えられます。たとえば, 点  $A$  を原点, 点  $B$  を  $x$  軸上の点として  $xy$  平面で, というのも脳裏に浮かびましたが, 計算量を考えて……。



12

[北海道大・文]

平面において、一直線上にない3点  $O, A, B$  がある。 $O$  を通り直線  $OA$  と垂直な直線上に  $O$  と異なる点  $P$  をとる。 $O$  を通り直線  $OB$  と垂直な直線上に  $O$  と異なる点  $Q$  をとる。ベクトル  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$  は  $\overrightarrow{AB}$  に垂直であるとする。

(1)  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$  を示せ。

(2) ベクトル  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  のなす角を  $\alpha$  とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  とする。このときベ

クトル  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$  のなす角が  $\pi - \alpha$  であることを示せ。

(3)  $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$  を示せ。



12

[北海道大・文]

- (1) まず,  $a > 0$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \alpha < \pi$  とし,  $xy$  平面上で,  
 $\overrightarrow{OA} = (a, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = r(\cos \alpha, \sin \alpha)$  とおく。

すると, 条件より,  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  とし,

$$\overrightarrow{OP} = (0, p), \quad \overrightarrow{OQ} = q(\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

さらに,  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$  と  $\overrightarrow{AB}$  が垂直なので,

$$(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ここで,  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (q \sin \alpha, p - q \cos \alpha)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (r \cos \alpha - a, r \sin \alpha)$  から,

$$q \sin \alpha (r \cos \alpha - a) + (p - q \cos \alpha) r \sin \alpha = 0$$

$\sin \alpha > 0$  より,  $q(r \cos \alpha - a) + r(p - q \cos \alpha) = 0$ ,  $pr - aq = 0 \dots \dots (*)$

さて,  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = pr \sin \alpha$ ,  $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = aq \sin \alpha$  なので,  $(*)$  から,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$$

- (2)  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$  のなす角を  $\beta$  ( $0 < \beta < \pi$ ) とおくと,  $\cos \beta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{-pq \cos \alpha}{|p| |q|}$

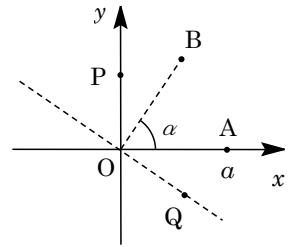
ここで,  $(*)$  から  $p$  と  $q$  は同符号なので,  $|p| |q| = |pq| = pq$  となり,

$$\cos \beta = \frac{-pq \cos \alpha}{pq} = -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  より,  $\frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi$  となるので,  $\beta = \pi - \alpha$  である。

- (3)  $(*)$  より,  $pr = aq$  となり,  $r|p| = a|q|$  である。

よって,  $|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OQ}|$  から,  $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$  となる。



### [解説]

まず, 2つの垂直関係から, 座標の設定という方法を考えました。しかし, (1)を解くと, その考え方を採用するほどでもないことがわかり, それで押し通そうとも思ったのですが, (3)で暗雲が漂いはじめました。ということで, リセットして……。

**13**

[一橋大]

$xyz$  空間において、原点を中心とする  $xy$  平面上の半径 1 の円周上を点  $P$  が動き、点  $(0, 0, \sqrt{3})$  を中心とする  $xz$  平面上の半径 1 の円周上を点  $Q$  が動く。

- (1) 線分  $PQ$  の長さの最小値と、そのときの点  $P, Q$  の座標を求めよ。
- (2) 線分  $PQ$  の長さの最大値と、そのときの点  $P, Q$  の座標を求めよ。

13

[一橋大]

- (1) 原点が中心で  $xy$  平面上の半径 1 の円周上の点  $P$  は、 $P(\cos\theta, \sin\theta, 0)$  と表せる。ただし  $0 \leq \theta < 2\pi$  である。また、点  $(0, 0, \sqrt{3})$  が中心で  $xz$  平面上の半径 1 の円周上の点  $Q$  は、 $Q(\cos\varphi, 0, \sqrt{3} + \sin\varphi)$  と表せる。ただし  $0 \leq \varphi < 2\pi$  である。

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos\theta - \cos\varphi)^2 + \sin^2\theta + (\sqrt{3} + \sin\varphi)^2 \\ &= 1 - 2\cos\theta\cos\varphi + 1 + 3 + 2\sqrt{3}\sin\varphi = -2\cos\theta\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi + 5 \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{u} = (-\cos\theta, \sqrt{3})$ 、 $\vec{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$  とおくと、

$$PQ^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 5$$

さて、まず  $\theta$  を  $0 \leq \theta < 2\pi$  で固定して考えると、線分  $PQ$  の長さが最小となるのは、 $\vec{v}$  が  $\vec{u}$  と逆向きになるときである。このとき  $PQ^2$  の最小値は、

$$2\sqrt{\cos^2\theta + 3} \cdot 1 \cdot \cos\pi + 5 = -2\sqrt{\cos^2\theta + 3} + 5$$

さらに、 $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$  から、 $\cos\theta = \pm 1$  のとき、 $PQ^2$  は最小値  $-2\sqrt{1+3} + 5 = 1$ 、すなわち  $PQ$  は最小値 1 をとる。

- (i)  $\cos\theta = 1$  ( $\theta = 0$ ) のとき

$$\vec{u} = (-1, \sqrt{3}) \text{ となり、} \varphi = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi \text{ となるので、}$$

$$P(1, 0, 0), Q\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- (ii)  $\cos\theta = -1$  ( $\theta = \pi$ ) のとき

$$\vec{u} = (1, \sqrt{3}) \text{ となり、} \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi \text{ となるので、}$$

$$P(-1, 0, 0), Q\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- (2) (1)より、線分  $PQ$  の長さが最大となるのは、 $\vec{v}$  が  $\vec{u}$  と同じ向きになるときである。このとき  $PQ^2$  の最大値は、

$$2\sqrt{\cos^2\theta + 3} \cdot 1 \cdot \cos 0 + 5 = 2\sqrt{\cos^2\theta + 3} + 5$$

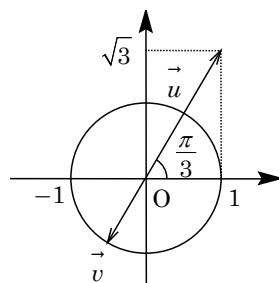
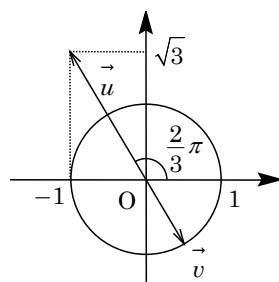
さらに  $\cos\theta = \pm 1$  のとき、 $PQ^2$  は最大値  $2\sqrt{1+3} + 5 = 9$ 、 $PQ$  は最大値 3 をとる。

- (i)  $\cos\theta = 1$  ( $\theta = 0$ ) のとき  $\vec{u} = (-1, \sqrt{3})$  となり、 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  となるので、

$$P(1, 0, 0), Q\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

- (ii)  $\cos\theta = -1$  ( $\theta = \pi$ ) のとき  $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$  となり、 $\varphi = \frac{\pi}{3}$  となるので、

$$P(-1, 0, 0), Q\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$



## [解説]

1 文字固定の最大・最小問題です。内積の定義を利用して、図で考えています。

**14**

[京都大・文]

$xyz$  空間の中で、 $(0, 0, 1)$  を中心とする半径  $1$  の球面  $S$  を考える。点  $Q$  が  $(0, 0, 2)$  以外の  $S$  上の点を動くとき、点  $Q$  と点  $P(1, 0, 2)$  の  $2$  点を通る直線  $l$  と平面  $z = 0$  との交点を  $R$  とおく。 $R$  の動く範囲を求め、図示せよ。

14

[京都大・文]

中心を  $A(0, 0, 1)$  とする半径 1 の球面  $S$  上にあり、点  $(0, 0, 2)$  以外を動く点  $Q$  に対し、点  $P(1, 0, 2)$  と点  $Q$  を結ぶ直線  $l$  が平面  $z=0$  と交わる点を  $R(x, y, 0)$  とおく。

そして、 $\overrightarrow{PA}$  と  $\overrightarrow{PR}$  のなす角を  $\theta$  とし、直線  $l$  が球面  $S$  に接するとき、 $\theta = 45^\circ$  であることに注目すると、

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PR} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PR}| \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PR}| \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $\overrightarrow{PA} = (-1, 0, -1)$ 、 $\overrightarrow{PR} = (x-1, y, -2)$  から、

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PR} = -(x-1) + 2 = -x + 3, \quad |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 5}$$

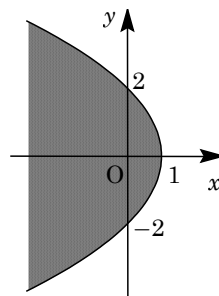
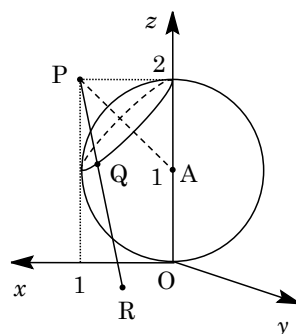
①に代入すると、 $-x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 5}$  となり、

$x \leq 3$  のもとで、

$$(-x + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 5, \quad x = -\frac{1}{4}y^2 + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②は  $x \leq 3$  を満たし、点  $Q$  が球面  $S$  上を動くとき、点  $R$  の動く範囲は、②を境界線とし原点を含む側である。

図示すると右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。



### [解説]

20 年以上も前になりますが、そのころ頻出していた点光源の問題です。内積を用いて円錐側面の式を立て、境界線を導いています。この方法の詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

15

[千葉大・文]

$k, m, n$  を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $2^k$  を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき、 $k$  を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (2)  $4m + 5n$  が 3 で割り切れるとする。このとき、 $2^{mn}$  を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

15

[千葉大・文]

(1)  $k$  を自然数,  $l, N$  を 0 以上の整数とすると、

(i)  $k = 3l + 1$  のとき  $2^k = 2^{3l+1} = 2 \cdot 8^l = 2(7+1)^l = 2(7N+1) = 7 \cdot 2N + 2$

これより,  $2^k$  を 7 で割った余りは 2 である。

(ii)  $k = 3l + 2$  のとき  $2^k = 2^{3l+2} = 4 \cdot 8^l = 4(7+1)^l = 4(7N+1) = 7 \cdot 4N + 4$

これより,  $2^k$  を 7 で割った余りは 4 である。

(iii)  $k = 3l + 3$  のとき  $2^k = 2^{3l+3} = 8 \cdot 8^l = 8(7+1)^l = 8(7N+1) = 7(8N+1) + 1$

これより,  $2^k$  を 7 で割った余りは 1 である。(i)~(iii)より,  $2^k$  を 7 で割った余りが 4 のとき,  $k$  を 3 で割った余りは 2 である。(2)  $m, n$  を自然数で,  $4m + 5n$  が 3 で割り切れるとき、

$$4m + 5n = 3(m + 2n) + (m - n)$$

これより,  $m - n$  は 3 で割り切れる, すなわち  $m$  を 3 で割った余りと  $n$  を 3 で割った余りは等しくなる。そこで,  $m', n'$  を 0 以上の整数として、

(i)  $m, n$  を 3 で割った余りが 1 のとき  $m = 3m' + 1, n = 3n' + 1$

$$mn = (3m' + 1)(3n' + 1) = 3(3m'n' + m' + n') + 1$$

これより,  $mn$  を 3 で割った余りは 1 である。

(ii)  $m, n$  を 3 で割った余りが 2 のとき  $m = 3m' + 2, n = 3n' + 2$

$$mn = (3m' + 2)(3n' + 2) = 3(3m'n' + 2m' + 2n' + 1) + 1$$

これより,  $mn$  を 3 で割った余りは 1 である。

(iii)  $m, n$  を 3 で割った余りが 0 のとき  $m = 3m', n = 3n'$

$$mn = (3m')(3n') = 3(3m'n') = 3(3m'n' + 3m' + 3n' + 3) - 9$$

これより,  $mn$  を 3 で割った余りは 0 である。(i)~(iii)より,  $mn$  を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 2 ではない。したがって, (1)より,  $2^{mn}$  を 7 で割った余りは 4 ではない。

## [解説]

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は, (1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお, 合同式を用いて記述しても構いません。

**16**

[九州大・理]

以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が正の偶数のとき、 $2^n - 1$  は 3 の倍数であることを示せ。
- (2)  $n$  を自然数とする。 $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素であることを示せ。
- (3)  $p, q$  を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$  を満たす  $p, q$  の組をすべて求めよ。



16

[九州大・理]

- (1)
- $n$
- が正の偶数のとき,
- $l$
- を自然数として,
- $n = 2l$
- とおくと,

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2l} - 1 = 4^l - 1 = (3+1)^l - 1 \\ &= (3^l + {}_lC_1 3^{l-1} + {}_lC_2 3^{l-2} + \cdots + {}_lC_{l-1} 3 + 1) - 1 \\ &= 3(3^{l-1} + {}_lC_1 3^{l-2} + {}_lC_2 3^{l-3} + \cdots + {}_lC_{l-1}) \end{aligned}$$

よって,  $2^n - 1$  は 3 の倍数である。

- (2)
- $n$
- を自然数とすると,
- $2^n + 1$
- と
- $2^n - 1$
- の最大公約数を
- $g$
- とおくと,

$$2^n + 1 = ga \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2^n - 1 = gb \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素})$$

①-②より,  $2 = g(a-b)$  となり,  $g = 2$  または  $g = 1$  である。 $g = 2$  のとき, ①は  $2^n + 1 = 2a$  となり, 左辺は奇数, 右辺は偶数で成立しない。よって,  $g = 1$  から,  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素である。

- (3) 異なる素数
- $p, q$
- に対して,
- $2^{p-1} - 1 = pq^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

- (i)
- $p$
- が偶数のとき

 $p$  は素数より  $p = 2$ , すると, ③から  $2^1 - 1 = 2q^2$  となり, 素数  $q$  は存在しない。

- (ii)
- $p$
- が奇数のとき

 $p-1$  は偶数となり, (1)の結果から  $2^{p-1} - 1$  は 3 の倍数である。すると, ③から  $pq^2$  は 3 の倍数となり,  $p = 3$  または  $q = 3$  である。

- (ii-i)
- $p = 3$
- のとき

③は  $2^2 - 1 = 3q^2$  となり, 素数  $q$  は存在しない。

- (ii-ii)
- $q = 3$
- のとき

③は  $2^{p-1} - 1 = 9p \cdots \cdots \textcircled{4}$  となり,  $k$  を自然数として,  $p = 2k+1$  とおくと,

$$2^{p-1} - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1)$$

(2)から  $2^k + 1$  と  $2^k - 1$  は互いに素で, ④は  $(2^k + 1)(2^k - 1) = 9(2k+1)$  となり,

$$(2^k + 1, 2^k - 1) = (9, 2k+1) \text{ または } (2k+1, 9)$$

 $(2^k + 1, 2^k - 1) = (9, 2k+1)$  のとき,  $k = 3$  すなわち  $p = 7$  となる。 $(2^k + 1, 2^k - 1) = (2k+1, 9)$  のとき, 満たす  $k$  は存在しない。

- (i)(ii)より, ③を満たす
- $p, q$
- の組は,
- $(p, q) = (7, 3)$
- のみである。

## [解説]

誘導つきの整数問題です。なお, ④を満たす  $p$  を求めるために, (2)の結論を利用する方法で記しましたが, グラフをイメージして, 直接的に解いても構いません。

17

[東北大・文]

次の性質をもつ数列  $\{a_n\}$  を考える。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} > a_n, \quad a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $a_n + a_{n+2}$  を  $a_{n+1}$  を用いて表せ。
- (2)  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により定まる数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

17

[東北大・文]

(1) 条件より,  $a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \cdots \cdots \textcircled{1}$ なので,

$$a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②-①より,  $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 3(a_{n+2} - a_n)$ ここで,  $a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$  から,  $a_{n+2} - a_n > 0$  となり,

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} = 3, \quad a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(2) ③より,  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3$  となり,  $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 3 \cdots \cdots \textcircled{4}$ ここで,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくと, ④より,  $b_{n+1} - b_n = 3$  となり,

$$b_n = b_1 + 3(n-1) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

さて, ①より,  $a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 = 3(a_1 + a_2)$  となり,  $a_1 = 3$  から,

$$9 - 6a_2 + a_2^2 = 3(3 + a_2), \quad a_2^2 - 9a_2 = 0$$

すると,  $a_2 > a_1 = 3$  から  $a_2 = 9$  となり,  $b_1 = a_2 - a_1 = 6$ よって, ⑤から,  $b_n = 6 + 3(n-1) = 3(n+1)$ (3) (2)より,  $n \geq 2$  において,

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k+1) = 3 + 3 \cdot \frac{2+n}{2}(n-1) = 3 + \frac{3}{2}(n^2 + n - 2) = \frac{3}{2}n(n+1)$$

なお, この式は  $n=1$  のときも成立している。

## [解説]

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり, さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

18

[広島大・文]

$n$  を自然数とし,  $p_n, q_n$  を実数とする。ただし,  $p_1, q_1$  は  $p_1^2 - 4q_1 = 4$  を満たすとする。2 次方程式  $x^2 - p_n x + q_n = 0$  は異なる実数解  $\alpha_n, \beta_n$  をもつとする。ただし,  $\alpha_n < \beta_n$  とする。  $c_n = \beta_n - \alpha_n$  とおくと、数列  $\{c_n\}$  は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$  とするとき,  $\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$  を  $r_n, r_{n+1}$  を用いて表せ。
- (2)  $c_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $p_n = n\sqrt{n}$  であるとき,  $q_n$  を  $n$  の式で表せ。

18

[広島大・文]

(1)  $r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n}) = \log_2 \sqrt{n}(n+1)$  より,  $r_{n+1} = \log_2 \sqrt{n+1}(n+2)$  となり,

$$r_{n+1} - r_n = \log_2 \frac{\sqrt{n+1}(n+2)}{\sqrt{n}(n+1)} = \log_2 \frac{n+2}{\sqrt{n}(n+1)}$$

よって,  $\frac{n+2}{\sqrt{n}(n+1)} = 2^{r_{n+1}-r_n} \dots\dots\dots$ ①

(2) ①より,  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 2^{r_{n+1}-r_n}$  となり,  $c_{n+1} = 2^{r_{n+1}-r_n} c_n$

ここで,  $f(n) = 2^{r_{n+1}-r_n}$  とおくと,  $c_{n+1} = f(n)c_n$  となり,  $n \geq 2$  において,

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 f(1) f(2) \cdots f(n-1) = c_1 \cdot 2^{r_2-r_1} \cdot 2^{r_3-r_2} \cdots 2^{r_n-r_{n-1}} = c_1 \cdot 2^{r_n-r_1} \\ &= c_1 \cdot 2^{\log_2 \sqrt{n}(n+1) - \log_2 2} = c_1 \cdot 2^{\log_2 \sqrt{n}(n+1)-1} \dots\dots\dots$$
②

さて,  $x^2 - p_n x + q_n = 0$  の実数解を  $\alpha_n, \beta_n$  ( $\alpha_n < \beta_n$ ) とすると,

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}, \quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}$$

すると,  $c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$  となり,  $c_1 = \sqrt{p_1^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$

よって, ②より,  $c_n = 2 \cdot 2^{\log_2 \sqrt{n}(n+1)-1} = 2^{\log_2 \sqrt{n}(n+1)} = \sqrt{n}(n+1) \dots\dots\dots$ ③

なお, ③は  $n=1$  のときも成立している。

(3) ③より,  $\sqrt{p_n^2 - 4q_n} = \sqrt{n}(n+1)$  となり,  $p_n^2 - 4q_n = n(n+1)^2 \dots\dots\dots$ ④

そこで,  $p_n = n\sqrt{n}$  のとき,  $p_n^2 = n^3$  となり, ④より,

$$q_n = \frac{1}{4} \{n^3 - n(n+1)^2\} = -\frac{1}{4} n(2n+1)$$

### [解説]

2次方程式の解を題材とした, 誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式  $c_{n+1} = f(n)c_n$  を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

19

[千葉大・理]

$b$  と  $c$  を  $b^2 + 4c > 0$  を満たす実数として、 $x$  に関する 2 次方程式  $x^2 - bx - c = 0$  の異なる解を  $\alpha$ ,  $\beta$  とする。数列  $\{a_n\}$  を、 $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  は漸化式  $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすことを示せ。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  の項  $a_n$  がすべて整数であるための必要十分条件は、 $b, c$  がともに整数であることである。これを証明せよ。

19

[千葉大・理]

(1)  $b^2 + 4c > 0$  のとき,  $x^2 - bx - c = 0$  の実数解  $\alpha, \beta$  について,

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = -c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件より,  $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$  から,  $\textcircled{1}$  と合わせて,

$$\begin{aligned} ba_{n+1} + ca_n &= (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n+1} + \alpha\beta^n + \alpha^n\beta + \beta^{n+1} - (\alpha^n\beta + \alpha\beta^n) = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \end{aligned}$$

よって,  $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \cdots \cdots \textcircled{3}$  が成立する。(2)  $a_n$  がすべて整数のとき,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から,  $a_1 = \alpha^0 + \beta^0 = 2, a_2 = \alpha^1 + \beta^1 = b$ これより  $b$  は整数となり,  $\textcircled{3}$  から,  $a_3 = ba_2 + ca_1, a_4 = ba_3 + ca_2$  となり,

$$2c = a_3 - ba_2 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad bc = a_4 - ba_3 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

また,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から  $a_3 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = b^2 + 2c$  となり,  $\textcircled{3}$  から,

$$a_5 = ba_4 + ca_3, \quad (b^2 + 2c)c = a_5 - ba_4 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

 $\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{6}$  より,  $2c, bc, (b^2 + 2c)c$  はすべて整数である。さて,  $2c$  が整数より,  $k$  を整数として  $c = \frac{k}{2}$  とおくことができる。ここで,  $k$  が奇数と仮定すると,  $bc = \frac{bk}{2}$  が整数より  $b$  は偶数となる。ところが,  $(b^2 + 2c)c = \frac{(b^2 + k)k}{2}$  は, 分子  $(b^2 + k)k$  が奇数より, 整数ではない。したがって,  $k$  は奇数ではなく偶数となり,  $c$  も整数である。逆に,  $b, c$  がともに整数であるとき,  $a_1 = 2, a_2 = b$  はともに整数であり,  $\textcircled{3}$  から, 帰納的に  $a_n (n = 3, 4, 5, \dots)$  はすべて整数となる。以上より,  $a_n$  がすべて整数であるための必要十分条件は,  $b, c$  がともに整数であることである。

## [解説]

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は, 見かけよりは難しめで, 詰めに時間がかかりました。

20

[東京大・理]

数列  $\{p_n\}$  を次のように定める。

$$p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  が  $n$  によらないことを示せ。
- (2) すべての  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対し,  $p_{n+1} + p_{n-1}$  を  $p_n$  のみを使って表せ。
- (3) 数列  $\{q_n\}$  を次のように定める。

$$q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  を示せ。



20

[東京大・理]

(1)  $p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}$  に対して,  $a_n = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  とおくと,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} + \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}} \\ &= \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+1}p_n} + \frac{p_{n+1}p_n}{p_{n+1}^2 + 1} + \frac{p_n}{p_{n+1}(p_{n+1}^2 + 1)} \\ &= \frac{(p_{n+1}^2 + 1)^2 + p_{n+1}^2 p_n^2 + p_n^2}{p_{n+1}p_n(p_{n+1}^2 + 1)} = \frac{(p_{n+1}^2 + 1) + p_n^2}{p_{n+1}p_n} = a_n \end{aligned}$$

これより,  $a_n = a_1 = \frac{2^2 + 1^2 + 1}{2 \cdot 1} = 3$  となり,  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} = 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

(2) すべての自然数  $n$  に対し,  $0 < p_n < p_{n+1}$  であることを数学的帰納法で証明する。

(i)  $n = 1$  のとき  $p_1 = 1, p_2 = 2$  より成立する。

(ii)  $n = k$  のとき  $0 < p_k < p_{k+1}$  すなわち  $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$  と仮定すると,

条件式より,  $p_{k+2} = \frac{p_{k+1}^2 + 1}{p_k} > \frac{p_{k+1}^2}{p_k}$  から,  $\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}} > \frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$  となる。

(i)(ii)より,  $0 < p_n < p_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) である。

さて, ①より,  $p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1 = 3p_{n+1}p_n \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$$p_n^2 + p_{n-1}^2 + 1 = 3p_n p_{n-1} \quad (n \geq 2) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

②-③より,  $p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 = 3p_n(p_{n+1} - p_{n-1})$

すると,  $p_{n-1} < p_n < p_{n+1}$  より,  $p_{n+1} - p_{n-1} > 0$  なので,

$$p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(3) (2)より,  $p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

ここで,  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定められる  $q_n$  に対して,  $p_n = q_{2n-1}$  であることを数学的帰納法で証明する。

(i)  $n = 1, 2$  のとき  $p_1 = q_1, q_3 = q_2 + q_1 = 2$  から  $p_2 = q_3$  となり成立する。

(ii)  $n = k, k + 1$  のとき  $p_k = q_{2k-1}, p_{k+1} = q_{2k+1}$  と仮定する。

このとき,  $p_{k+2} = 3p_{k+1} - p_k = 3q_{2k+1} - q_{2k-1}$  となり,

$$\begin{aligned} q_{2k+3} &= q_{2k+2} + q_{2k+1} = q_{2k+1} + q_{2k} + q_{2k+1} = 2q_{2k+1} + q_{2k} \\ &= 2q_{2k+1} + (q_{2k+1} - q_{2k-1}) = 3q_{2k+1} - q_{2k-1} \end{aligned}$$

(i)(ii)より,  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  が成り立つ。

### [解説]

複雑な漸化式ですが, 誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

21

[広島大・理]

$m, n$  を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)  $m \geq 2, n \geq 2$  とする。異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)  $n \geq 3$  とする。3 種類の文字  $a, b, c$  から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)  $n \geq 3$  とする。 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率  $p_n$  を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば、 $n = 3$  のとき、A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は、

$$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\},$$

$$\{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$$

の 5 通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$  である。

(4) (3) の確率  $p_n$  が  $\frac{1}{3}$  以下となるような  $n$  の値の範囲を求めよ。

21

[広島大・理]

(1) 異なる  $m$  種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は、 ${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2}$  通り。

そして、この文字から重複を許して  $n$  個を選び 1 列に並べるのは、 $2^n$  通り。この中で、2 種類の文字を含むのは、1 種類が 2 通りあるので、 $2^n - 2$  通りである。

よって、求める場合は、 $\frac{m(m-1)}{2}(2^n - 2) = m(m-1)(2^{n-1} - 1)$  通りである。

(2) 3 種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び 1 列に並べるのは、 $3^n$  通り。

この中で、1 種類となるのは 3 通り、2 種類となるのは  ${}_3 C_2(2^n - 2) = 3(2^n - 2)$  通りなので、3 種類の文字を含む方法は、

$$3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り})$$

(3) (i)  $n$  人を 1 組にグループ分けするとき 明らかに 1 通り。

(ii)  $n$  人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき、その分け方は、2 種類の文字を 1 列に並べ、2 種類とも含む場合に一致するので、(1)から  $2^n - 2$  通りとなる。これより、グループを区別しないときは、 $\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1$  通りである。

(iii)  $n$  人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき、その分け方は、3 種類の文字を 1 列に並べ、3 種類とも含む場合に一致するので、(2)から  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$  通りとなる。そして、グループを区別しないときは、 $\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$  通りである。

(i)~(iii)より、 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする方法は、

$$1 + (2^{n-1} - 1) + \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \quad (\text{通り})$$

すると、このときグループ数が 2 である確率  $p_n$  は、 $p_n = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1} + 1} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}$

(4)  $p_n \leq \frac{1}{3}$  のとき、 $\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1} \leq \frac{1}{3}$  となり、 $3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \geq 0 \dots\dots\dots(*)$

ここで、 $f(n) = 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 = 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} + 7$  とおくと、

$$f(3) = -8 < 0, \quad f(4) = -14 < 0, \quad f(5) = -8 < 0, \quad f(6) = 58 > 0$$

さて、 $n \geq 6$  において、 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32} > 6$  より、 $f(n) > 7 > 0$  である。

よって、(\*)が成り立つ  $n$  の値の範囲は、 $n \geq 6$  である。

### [解 説]

ポイントは、(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認。

22

[名古屋大・理]

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k \text{ (} k=2, 3, 4 \text{) にあるならば, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め、この試行を繰り返す。また、石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 試行を 6 回繰り返した後に、石が点  $k$  ( $k=1, 2, 3, 4, 5$ ) にある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。
- (3) 試行を  $n$  回 ( $n \geq 1$ ) 繰り返した後に、ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

22

[名古屋大・理]

- (1) 与えられた試行により、石が点  $k$  にある確率を  $P_n(k)$  とすると、初めは点 1 にあることより、右図より計算すると、

$$P_1(1) = 0, P_1(2) = 1, P_1(3) = 0,$$

$$P_1(4) = 0, P_1(5) = 0$$

$$P_2(1) = \frac{1}{2}, P_2(2) = 0, P_2(3) = \frac{1}{2},$$

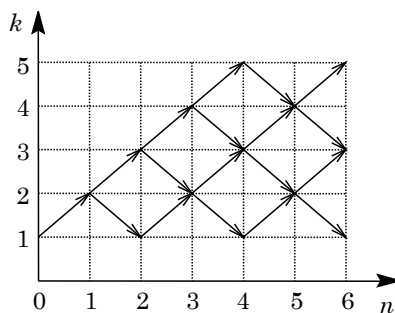
$$P_2(4) = 0, P_2(5) = 0$$

$$P_3(1) = 0, P_3(2) = \frac{3}{4}, P_3(3) = 0, P_3(4) = \frac{1}{4}, P_3(5) = 0$$

$$P_4(1) = \frac{3}{8}, P_4(2) = 0, P_4(3) = \frac{1}{2}, P_4(4) = 0, P_4(5) = \frac{1}{8}$$

$$P_5(1) = 0, P_5(2) = \frac{5}{8}, P_5(3) = 0, P_5(4) = \frac{3}{8}, P_5(5) = 0$$

$$P_6(1) = \frac{5}{16}, P_6(2) = 0, P_6(3) = \frac{1}{2}, P_6(4) = 0, P_6(5) = \frac{3}{16}$$



- (2) 試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点にすべてに印がついているのは、
- (i) 4 回目に 5 のとき 5 回目以降は任意なので、その確率は  $P_4(5) \cdot 1 = \frac{1}{8}$  となる。
- (ii) 4 回目に 3 のとき 5 回目に 4 で、6 回目に 5 のときだけなので、その確率は  $P_4(3) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  となる。
- (i)(ii)より、求める確率は、 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  である。
- (3) まず、試行を  $n$  回繰り返した後に、印が 3 つの点についているとき、点 1 と 2 は必ず印がつくことより、印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると、点 3 に少なくとも 1 回印がつき、点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて、点 2 → 点 3 → 点 2 となる確率は  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 、点 2 → 点 1 → 点 2 となる確率は  $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$  である。これより、点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は、 $l$  を自然数として、

$$(i) \quad n \text{ が奇数 } (n = 2l + 1) \text{ のとき } \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^l - \left(\frac{1}{2}\right)^l = \left(\frac{3}{4}\right)^l - \left(\frac{1}{2}\right)^l$$

なお、 $n = 1$  のときも成立している。

$$(ii) \quad n \text{ が偶数 } (n = 2l) \text{ のとき } \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}$$

### [解説]

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

23

[東京大・文]

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを 1 枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば、コインを 5 回投げ、その結果が順に表, 裏, 裏, 表, 裏であったとすると、得られる文字列は, AABBAAB となる。このとき、左から 4 番目の文字は B, 5 番目の文字は A である。

- (1)  $n$  を正の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2)  $n$  を 2 以上の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。

23

[東京大・文]

(1) まず、文字列 AA について、左右を区別し  $A_1A_2$  とする。

さて、表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを投げ、表が出たときは文字列  $A_1A_2$ 、裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして、 $n$  回コインを投げ、文字列の左から  $n$  番目の文字が  $A_1, A_2, B$  である確率を、それぞれ  $p_n, q_n, r_n$  とおく。すると、 $p_1 = r_1 = \frac{1}{2}, q_1 = 0$  で、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad q_{n+1} = p_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 $p_{n+1} = \frac{1}{2}(q_n + r_n) = \frac{1}{2}(1 - p_n) = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$  となり、

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right), \quad p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、 $p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  となり、②より、 $n \geq 2$  において、

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお、この式は、 $n=1$  のときも満たしている。

以上より、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率  $p_n + q_n$  は、

$$p_n + q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(2)  $n \geq 2$  のとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となるのは、文字列が  $A_2B$  となる場合より、その確率は、

$$q_{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

### [解説]

直接的に求めるのは難しそうだったので、漸化式を立てました。そして、いったん AA の文字列について左側と右側を区別し、3つの状態に分けて考えたわけです。

24

[京都大・理]

2つの関数を,  $f_0(x) = \frac{x}{2}$ ,  $f_1(x) = \frac{x+1}{2}$  とおく。  $x_0 = \frac{1}{2}$  から始め, 各  $n = 1, 2, \dots$  について, それぞれ確率  $\frac{1}{2}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $x_n = f_1(x_{n-1})$  と定める。このとき  $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率  $P_n$  を求めよ。



24

[京大・理]

まず,  $x_0 = \frac{1}{2}$  で,  $x_n = \frac{x_{n-1}}{2}$  または  $x_n = \frac{x_{n-1}+1}{2}$  から, 帰納的に  $0 < x_n < 1$  である。

そこで,  $0 < x_n < \frac{1}{3}$  となる確率を  $Q_n$  とおくと, 条件より  $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率が  $P_n$  より,  $\frac{1}{3} \leq x_n < \frac{2}{3}$  となる確率は  $P_n - Q_n$ ,  $\frac{2}{3} \leq x_n < 1$  となる確率は  $1 - P_n$  である。

さて,  $0 < x_n < \frac{1}{3}$  となるのは,  $0 < x_{n-1} < \frac{1}{3}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $\frac{1}{3} \leq x_{n-1} < \frac{2}{3}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  のときより,

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{2}(P_{n-1} - Q_{n-1}), \quad Q_n = \frac{1}{2}P_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また,  $\frac{2}{3} \leq x_n < 1$  となるのは,  $\frac{1}{3} \leq x_{n-1} < \frac{2}{3}$  で  $x_n = f_1(x_{n-1})$  または  $\frac{2}{3} \leq x_{n-1} < 1$  で  $x_n = f_1(x_{n-1})$  のときより,

$$1 - P_n = \frac{1}{2}(P_{n-1} - Q_{n-1}) + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}), \quad Q_{n-1} = -1 + 2P_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } -1 + 2P_{n+1} = \frac{1}{2}P_{n-1}, \quad P_{n+1} = \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$P_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(P_{n-1} - \frac{2}{3}\right) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで,  $x_0 = \frac{1}{2}$  で,  $x_1 = f_0(x_0) = \frac{1}{4}$  または  $x_1 = f_1(x_0) = \frac{3}{4}$  から,  $P_0 = 1, P_1 = \frac{1}{2}$

(i)  $n = 2k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき

③より,  $P_{2k} - \frac{2}{3} = \left(P_0 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ ,  $P_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$  となり,

$$P_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)  $n = 2k+1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき

③より,  $P_{2k+1} - \frac{2}{3} = \left(P_1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ ,  $P_{2k+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$  となり,

$$P_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

### [解説]

与えられた関数は, 数直線上で, 点  $x$  と原点との中点または点  $x$  と点  $1$  との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して, 初めは樹形図を書いたり, さらに  $2^n$  を  $3$  で割った余りを考えたりして, 大雑把に結論は出ました。ただ, 突っ込みどころが多すぎたため, 考えを改め, 状態を  $3$  つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。