第 3 講　隣接 2 項間型の漸化式（1）

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1$$

解説　$a_1=1$，$a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，

$a_5=2a_4+1=31$

まず，階差数列は，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，$a_4-a_3=8$，$a_5-a_4=16$ となり，公比 2 の等比数列と予測できるので, Point 2 と同じ考え方で，

$$a_5=a_1+(2+4+8+16)=a_1+(2+2^2+2^3+2^4)=31$$

また，$a_1+1=2$，$a_2+1=4$，$a_3+1=8$，$a_4+1=16$，$a_5+1=32$ という規則性に気付いたときには，数列$\{a_n\}$の各項に 1 を加えた新しい数列を設定するとよい。つまり，$b_n=a_n+1$ とおき，数列$\{b_n\}$が公比 2 の等比数列と考え，

$$b_5=2\cdot 2^4=32\qquad \text{すなわち}\qquad a_5=b_5-1=32-1=31$$

計算の容易な後者の立場は，与えられた漸化式を $b_{n+1}=2b_n$，言い換えると $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ と変形することに等しく，等比型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}\quad \text{（ただし } f(n) \text{ が定数の場合）}$$

を目標とした式変形であることがわかる。これは，もとの漸化式の定数項$+1$を a_n と a_{n+1} に振り分けているとみなすこともできる。一般化すると, Point 5 になる。

Point 5

$a_1=a$,　$a_{n+1}=pa_n+q$　$(p\neq 1,\ q\neq 0)$ で定められた数列

式変形の目標を，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ とし，$b_n=a_n-\alpha$ とおくと，

$$b_{n+1}=pb_n$$

これより，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となる。

なお，目標の式を展開して $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$ とし，もとの漸化式と係数を比較すると，$-p\alpha+\alpha=q$ すなわち $\alpha=p\alpha+q$ より，α の値が求まる。

《注》漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ ……①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには，定数項 q を新たに設定した数列の漸化式では 0 にする必要がある。その 1 つの方法として，①を満たす特殊な数列を利用するという手がある。

定数の処理ということから，これを定数数列 $a_n=\alpha$ とする。①に代入すると，

$$\alpha=p\alpha+q\ \cdots\cdots②$$

①，②の両辺の差をとると，目標の式 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ が得られる。

例題 5　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1$$

解　$a_{n+1}=2a_n+1$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha$ とおく。

①に代入して，$\alpha=2\alpha+1$ より，$\alpha=-1$ となり，

$$-1=2\cdot(-1)+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$b_n=a_n+1$ とおくと $b_{n+1}=2b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので，

$$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(a_1+1)2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

したがって，$a_n=b_n-1=2^n-1$

《注》イントロのように $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおき，階差数列を利用すると，

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=(2a_{n+1}+1)-(2a_n+1)=2(a_{n+1}-a_n)=2b_n$$

よって，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(a_2-a_1)2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$n\geqq 2$ で，$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$（$n=1$ のときも成立する）

また，等差型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$$

を目標とした式変形は次のようになるが，計算はさらに複雑になる。

①の a_n の係数 2 を新たに設定した数列の漸化式では 1 にすることを考えて，両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\qquad すなわち\qquad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$n\geqq 2$ で，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\frac{a_1}{2^1}+\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

この式は $n=1$ のときも成立する。

よって，$a_n=2^nb_n=2^n\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=2^n-1$

練習 5　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=6,\quad a_{n+1}=5a_n-4$

(2)　$a_1=0,\quad 2a_{n+1}-a_n-2=0$

イントロ 次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=2a_n-n$$

解説 $a_1=3$，$a_2=2a_1-1=5$，$a_3=2a_2-2=8$，$a_4=2a_3-3=13$，

$a_5=2a_4-4=22$

まず，階差数列は，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5-a_4=9$ となるが，これだけでは規則性が予測できない。もう一度，階差数列をとるという手もあるが，ここでは Point 5 と同じように，新たに設定した数列$\{b_n\}$の漸化式を$b_{n+1}=2b_n$ とすることを考える。つまり，等比型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}\quad（ただし f(n) が定数の場合）$$

の形になるように，漸化式の$-n$の項をa_nとa_{n+1}に振り分けるわけである。

さて，$-n$はnの 1 次式なので，Point 5 と異なり，1 次式$\alpha n+\beta$を用いて振り分ける。一般的には，次の Point 6 のようになる。

Point 6

$a_1=a,\quad a_{n+1}=pa_n+qn+r\quad(p\neq1)$ で定められた数列

式変形の目標を$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$とし，

$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$とおくと，$b_{n+1}=pb_n$となる。

これより，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_1-\alpha-\beta$，公比pの等比数列である。

なお，目標の式を展開し，もとの漸化式と係数を比較すると，

$$-p(\alpha n+\beta)+\alpha(n+1)+\beta=qn+r,\quad \alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+qn+r$$

となり，この式よりα，βを求める。

《注》漸化式$a_{n+1}=pa_n+qn+r\cdots\cdots$①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには，1 次の項$qn+r$を新たに設定した数列の漸化式では 0 にする必要がある。その方法として，Point 5 と同じく，①を満たす特殊な数列を利用してみる。

1 次式の処理ということから，これを等差数列$a_n=\alpha n+\beta$ とする。

①に代入すると，

$$\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+qn+r\cdots\cdots②$$

①，②の両辺の差をとると，目標の式

$$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$$

が得られる。

例題 6　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}=2a_n-n$$

解　$a_{n+1}=2a_n-n$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha n+\beta$ とおく。

①に代入して，$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)-n$ より，

$$\alpha n+\alpha+\beta=(2\alpha-1)n+2\beta$$

すべての n に対して成り立つ条件は，$\alpha=2\alpha-1$，$\alpha+\beta=2\beta$

すると，$\alpha=1$，$\beta=1$ となり，

$$(n+1)+1=2(n+1)-n\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①−②より，$a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=2\{a_n-(n+1)\}$

$b_n=a_n-(n+1)$ とおくと $b_{n+1}=2b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列なので，

$$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(a_1-1-1)2^{n-1}=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

したがって，$a_n=b_n+(n+1)=2^{n-1}+n+1$

《注》イントロのように $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおき，階差数列を利用すると，

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{2a_{n+1}-(n+1)\}-(2a_n-n)$$
$$=2(a_{n+1}-a_n)-1=2b_n-1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

これより，数列 $\{b_n\}$ の漸化式は Point 5 のタイプになっていることがわかる。

よって，①を満たす 1 つの数列を $b_n=\alpha$ とおく。

①に代入して，$\alpha=2\alpha-1$ より，$\alpha=1$ となり，

$$1=2\cdot 1-1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①−②より，$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

$c_n=b_n-1$ とおくと $c_{n+1}=2c_n$ となり，数列 $\{c_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので，

$$c_n=c_1\cdot 2^{n-1}=(b_1-1)2^{n-1}=(a_2-a_1-1)2^{n-1}=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

したがって，$b_n=c_n+1=2^{n-1}+1$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1)=3+\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}+(n-1)=2^{n-1}+n+1$$

この式は，$n=1$ のときも成立する。

このように，簡単な漸化式にもかかわらず，かなりの計算量が必要です。

練習 6　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=3a_n+n-2$

(2)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-a_n+2n$

第3講　隣接2項間型の漸化式(1)（略解）

練習5

(1)　$a_{n+1}=5a_n-4$ より，$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

$$a_n-1=(a_1-1)\cdot 5^{n-1}=5\cdot 5^{n-1}=5^n$$

よって，$a_n=5^n+1$

(2)　$2a_{n+1}-a_n-2=0$ より $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ となり，$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって，$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

練習6

(1)　$a_{n+1}=3a_n+n-2$ より，$a_{n+1}-\left\{-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{3}{4}\right\}=3\left\{a_n-\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\right\}$

$$a_n-\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)=\left\{a_1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot 3^{n-1}=\frac{3}{4}\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot 3^n$$

よって，$a_n=\frac{1}{4}\cdot 3^n-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$

(2)　$a_{n+1}=-a_n+2n$ より，$a_{n+1}-\left\{(n+1)-\frac{1}{2}\right\}=-\left\{a_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$$a_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left\{a_1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

よって，$a_n=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}+n-\frac{1}{2}$