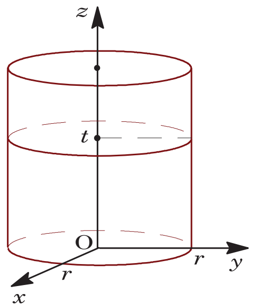
第４講　円柱面と円錐面の方程式



座標軸を中心軸とする直円柱面の方程式を考えます。このとき，中心軸に垂直な切り口は，底面と同じ半径の円になります。

ここで，z 軸を中心軸とし，底面の円の半径が r の円柱について，その円柱面の方程式を立てます。

平面 $z=t$ でこの円柱を切断したとき，その切り口の円は，この平面と点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 r の球面の交線として表されます。

$$x^2+y^2+(z-t)^2=r^2,\quad z=t$$

パラメータ t を消去すると，この円柱面の方程式は，

$$x^2+y^2=r^2$$

円柱面の方程式

原点を中心とする半径 r の円を底面とし，z 軸を中心軸とする円柱面の方程式

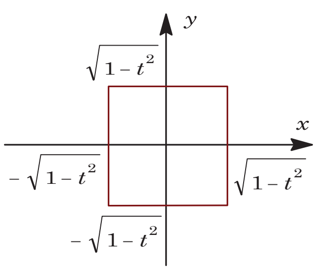
$$x^2+y^2=r^2$$

《注》「z は任意」という記述は省略されています。

例題７　断面が半径１の円である直円柱が２つある。１つは中心軸が x 軸，もう１つは中心軸が y 軸になるように配置されている。この２つの円柱の共通部分を z 軸に垂直な平面で切断すると，その切り口は正方形であることを示せ。

解　中心軸が x 軸，y 軸の直円柱は，それぞれ，

$$y^2+z^2=1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad x^2+z^2=1\ \cdots\cdots\cdots②$$



円柱の共通部分は，連立方程式①かつ②で表される。

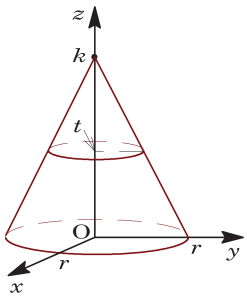
この部分を，z 軸に垂直な平面 $z=t$ ……③で切断する。ただし，$-1<t<1$ とする。

③を①②に代入すると，$y^2+t^2=1$，$x^2+t^2=1$

$$x=\pm\sqrt{1-t^2}\ ,\quad y=\pm\sqrt{1-t^2}$$

よって，平面 $z=t$ 上での切り口は，１辺の長さが $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。

次に，座標軸を中心軸とする直円錐面の方程式を考えます。このとき，円錐の軸に垂直な切り口は円になります。



ここで，z 軸を中心軸とし，頂点$(0,\ 0,\ k)$，底面の円の半径が r の円錐について，その円錐面の方程式を立てます。

平面$z=t$ で切断したとき，その切り口の円は，この平面と点$(0,\ 0,\ t)$を中心とする球面との交線として表されます。
$k>0$のとき，この球面の半径をr'とおくと，

$$r':r=(k-t):k\ ,\quad r'=\frac{(k-t)r}{k}$$

すると，切り口の円の方程式は，$x^2+y^2+(z-t)^2=\dfrac{(k-t)^2r^2}{k^2}$，$z=t$

パラメータ t を消去すると，この円錐面の方程式は，

$$x^2+y^2=\frac{(k-z)^2r^2}{k^2},\quad k^2(x^2+y^2)=r^2(z-k)^2$$

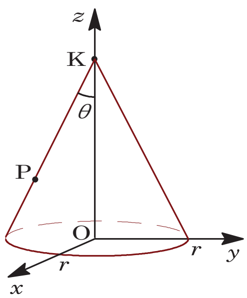
円錐面の方程式

原点を中心とする半径 r の円を底面とし，頂点$(0,\ 0,\ k)$の円錐面の方程式

$$k^2(x^2+y^2)=r^2(z-k)^2$$

《注》円錐の頂点を K$(0,\ 0,\ k)$，円錐面上の任意の点をP$(x,\ y,\ z)$とし，母線と中心軸のなす角をθ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{KO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KP}}=|\overrightarrow{\mathrm{KO}}||\overrightarrow{\mathrm{KP}}|\cos\theta$$



ここで，母線の長さが$\sqrt{k^2+r^2}$ より，

$$\cos\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+r^2}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{KO}}=(0,\ 0,\ -k)$，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=(x,\ y,\ z-k)$より，

$$-k(z-k)=k\sqrt{x^2+y^2+(z-k)^2}\cdot\frac{k}{\sqrt{k^2+r^2}}$$

$$-(z-k)\sqrt{k^2+r^2}=k\sqrt{x^2+y^2+(z-k)^2}$$

$z\leqq k$ より，両辺を 2 乗してまとめると，

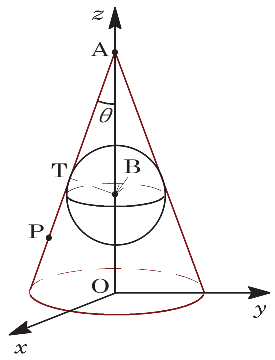
$$(z-k)^2(k^2+r^2)=k^2\{x^2+y^2+(z-k)^2\}$$

$$k^2(x^2+y^2)=r^2(z-k)^2$$

このように，内積の定義を用いて，円錐面の方程式を立式することもできます。

例題 8　点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 5)$ を通り，球面 $S : x^2+y^2+(z-2)^2=1$ に接する直線全体によってできる円錐面の方程式を求めよ。

解　球面 S の中心を $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$，S と直線の接点を T，母線と中心軸のなす角を θ とおくと，



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{3^2-1^2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ここで，円錐面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z-5)$ より，

$$-3(z-5)=3\sqrt{x^2+y^2+(z-5)^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

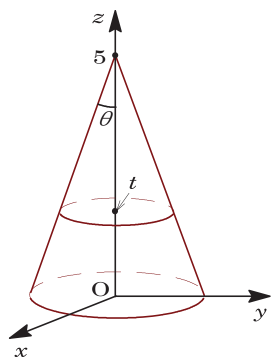
$z\leqq5$ より，両辺を 2 乗してまとめると，

$$9(z-5)^2=8\{x^2+y^2+(z-5)^2\}$$

$$8x^2+8y^2=(z-5)^2$$

《注》z 軸に垂直な断面が円であることに注目すると，次のようになります。

まず，母線と中心軸のなす角を θ とおくと，



$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{AT}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

円錐面を平面 $z=t$ で切断すると，その切り口の円の半径は，

$$(5-t)\tan\theta=\frac{5-t}{2\sqrt{2}}$$

すると，この円は，点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $\dfrac{5-t}{2\sqrt{2}}$ の球面と，平面 $z=t$ との交線として表され，

$$x^2+y^2+(z-t)^2=\left(\frac{5-t}{2\sqrt{2}}\right)^2,\quad z=t$$

パラメータ t を消去すると，この円錐面の方程式は，

$$x^2+y^2=\frac{(5-z)^2}{8},\quad 8x^2+8y^2=(z-5)^2$$